

Aufgabe 4 zu 3.2.3.3 - Lösung -

Zeigen Sie, dass bei einem linearen Verlauf der Kapitalbindung die Summe der Zinsen nach der Durchschnittsmethode und nach der Restwertmethode gleich ist.

Es sei:

- A_0 = Anschaffungsausgabe
- R_n = Restwert am Ende der Lebensdauer
- n = Lebensdauer
- t = Zeit
- $KB(t)$ = Kapitalbindung in Abhängigkeit von der Zeit
- KB_d = Durchschnittliche Kapitalbindung
- i = Zinssatz
- Z_d = Durchschnittliche jährliche Zinsen
- Z = Gesamte Zinsen über die Lebensdauer

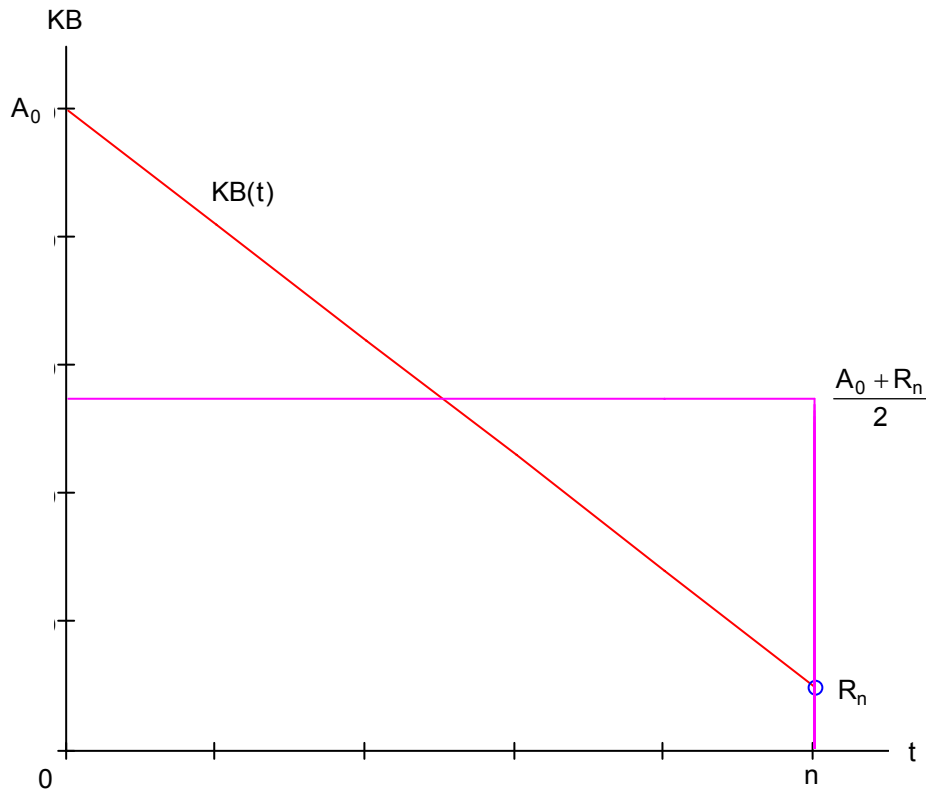
Bei linearer Abschreibung folgt die Kapitalbindung der Funktion:

$$KB(t) = A_0 - \frac{A_0 - R_n}{n} \cdot t$$

Die durchschnittliche Kapitalbindung ist:

$$KB_d = \frac{A_0 + R_n}{2}$$

Grafisch ergibt sich folgendes Bild:



Der Betrag der durchschnittlichen Kapitalbindung, multipliziert mit dem Zinssatz, ergibt die jährlichen kalkulatorischen Zinsen nach der Durchschnittsmethode:

Aufgabe 4 zu 3.2.3.3 - Lösung -

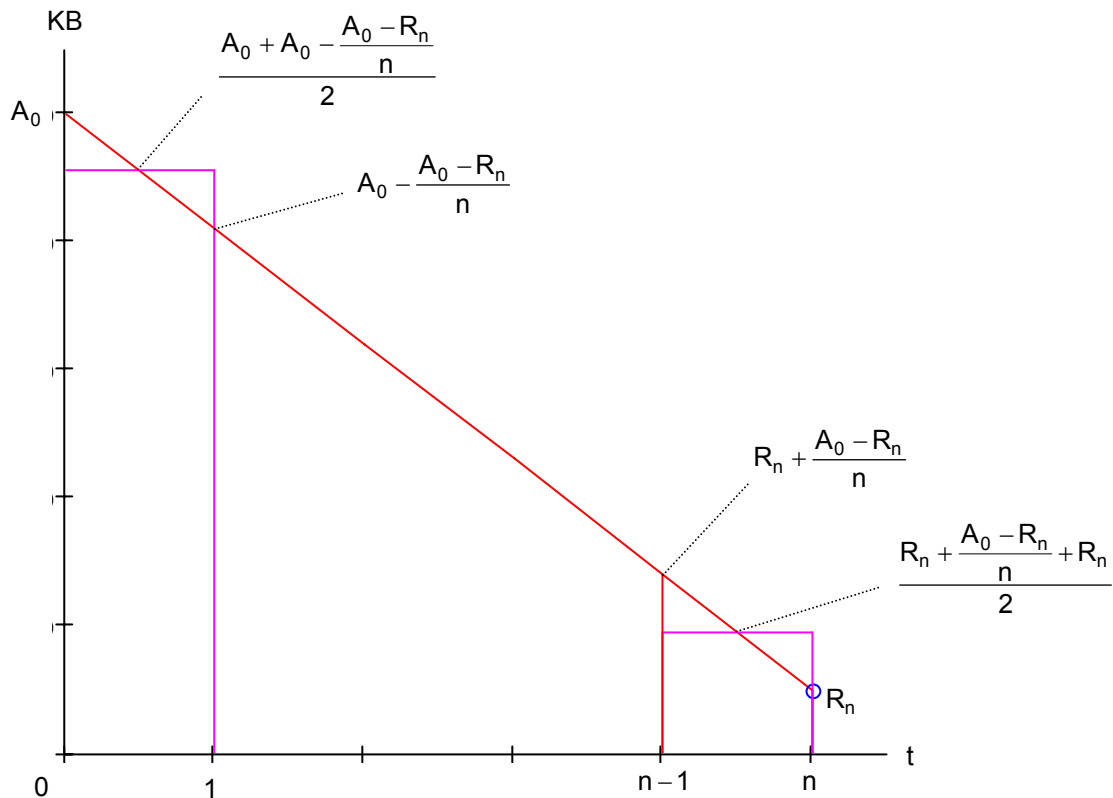
$$Z_d = \frac{A_0 + R_n}{2} \cdot i$$

Multipliziert man diesen Betrag mit der Lebensdauer, so erhält man die gesamten Zinsen:

$$Z = \frac{A_0 + R_n}{2} \cdot i \cdot n$$

Nach der Restwertmethode ergeben sich die jährlichen Zinsen aus der durchschnittlichen Kapitalbindung des jeweiligen Jahres, berechnet als Durchschnitt aus dem Wert zu Beginn des Jahres und aus dem Wert am Ende des Jahres. Dieser "Restwert" ist nicht zu verwechseln mit dem Restwert R_n am Ende der Lebensdauer.

Die Höhe der beiden Rechtecke in der folgenden Zeichnung ist die durchschnittliche Kapitalbindung des ersten Jahres und die des letzten Jahres:



Die durchschnittlichen Beträge der Kapitalbindung in den einzelnen Jahren unterscheiden sich voneinander jeweils um den Betrag der konstanten Abschreibung. Sie bilden also eine arithmetische Reihe.

Der durchschnittliche Wert aller jährlichen Kapitalbindungsbeträge ist nichts anderes als die durchschnittliche Kapitalbindung KB_d . Diese ergibt sich als durchschnittlicher Wert der arithmetischen Reihe, indem das erste und das letzte Glied addiert und durch 2 geteilt werden:

$$KB_d = \frac{\frac{A_0 + A_0 - \frac{A_0 - R_n}{n}}{2} + \frac{R_n + \frac{A_0 - R_n}{n} + R_n}{2}}{2}$$

Nach einigen Umformungen folgt hieraus:

Aufgabe 4 zu 3.2.3.3 - Lösung -

$$KB_d = \frac{A_0 + R_n}{2}$$

Es ergibt sich also derselbe Wert für die durchschnittliche Kapitalbindung wie bei der Durchschnittsmethode.

Somit sind auch die durchschnittlichen jährlichen Zinsen und die gesamten Zinsen über die Lebensdauer gleich:

$$Z_d = \frac{A_0 + R_n}{2} \cdot i$$

und

$$Z = \frac{A_0 + R_n}{2} \cdot i \cdot n$$