Erwartungswert einer Summe diskreter Zufallsvariabler

Sei X eine diskrete Zufallsvariable, welche die Werte $x_i = x_1 \dots x_n$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ annehmen kann. Der Erwartungswert einer solchen Zufallsvariablen ist definiert als

(1) $$E(X) = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i)$$

Für eine andere diskrete Zufallsvariable Y mit den möglichen Werten $y_j = y_1 \dots y_m$, die mit der Wahrscheinlichkeit $P(Y = y_j)$ eintreten, ist der Erwartungswert entsprechend

(2) $$E(Y) = \sum_j y_j \cdot P(Y = y_j)$$

Die Summe $X + Y$ hat den Erwartungswert

(3) $$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Beweis:

Die möglichen Werte der Zufallsvariablen $X + Y$ bestehen aus allen möglichen Summen $x_i + y_j$. Jedes x_i muss mit jedem y_j kombiniert werden. So gibt es für x_1 folgende Kombinationen:

$$x_1 + y_1,\ x_1 + y_2,\ x_1 + y_3,\ \dots,\ x_1 + y_m$$

Ebenso kann x_2 mit allen Ausprägungen von Y kombiniert werden:

$$x_2 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_2 + y_3,\ \dots,\ x_2 + y_m$$

Entsprechend müssen die Summen mit x_3 bis x_n gebildet werden, sodass sich als letzte Kombination ergibt:

$$x_n + y_1,\ x_n + y_2,\ x_n + y_3,\ \dots,\ x_n + y_m$$

Alle diese Kombinationen von Ereignissen sind mit der Wahrscheinlichkeit ihres Eintritts zu multiplizieren und zum Erwartungswert zu addieren. Mit der Funktion $P(X = x_i, Y = y_j)$ für die Wahrscheinlichkeit des gemeinsamen Eintretens der Ereignisse x_i und y_j ist der Erwartungswert aller möglichen Kombinationen von x_i und y_j:

$$\begin{aligned}
E(X+Y) = \quad & (x_1 + y_1) \cdot P(X = x_1, Y = y_1) \\
+ \quad & (x_1 + y_2) \cdot P(X = x_1, Y = y_2) \\
+ \quad & (x_1 + y_3) \cdot P(X = x_1, Y = y_3) \\
\vdots \quad & \\
+ \quad & (x_1 + y_m) \cdot P(X = x_1, Y = y_m) \\
\\
+ \quad & (x_2 + y_1) \cdot P(X = x_2, Y = y_1) \\
+ \quad & (x_2 + y_2) \cdot P(X = x_2, Y = y_2) \\
\vdots \quad & \\
+ \quad & (x_2 + y_m) \cdot P(X = x_2, Y = y_m) \\
\vdots \quad & \\
+ \quad & (x_n + y_1) \cdot P(X = x_n, Y = y_1) \\
+ \quad & (x_n + y_2) \cdot P(X = x_n, Y = y_2) \\
\vdots \quad & \\
+ \quad & (x_n + y_m) \cdot P(X = x_n, Y = y_m)
\end{aligned}$$

Erwartungswert einer Summe diskreter Zufallsvariabler

In diesem Ausdruck können die Klammern ausmultipliziert werden:

$$
\begin{aligned}
E(X+Y) = \quad & x_1 \cdot P(X=x_1, Y=y_1) + y_1 \cdot P(X=x_1, Y=y_1) \\
+ \quad & x_1 \cdot P(X=x_1, Y=y_2) + y_2 \cdot P(X=x_1, Y=y_2) \\
+ \quad & x_1 \cdot P(X=x_1, Y=y_3) + y_3 \cdot P(X=x_1, Y=y_3) \\
\vdots \quad & \\
+ \quad & x_1 \cdot P(X=x_1, Y=y_m) + y_m \cdot P(X=x_1, Y=y_m) \\
\\
+ \quad & x_2 \cdot P(X=x_2, Y=y_1) + y_1 \cdot P(X=x_2, Y=y_1) \\
+ \quad & x_2 \cdot P(X=x_2, Y=y_2) + y_2 \cdot P(X=x_2, Y=y_2) \\
\vdots \quad & \\
+ \quad & x_2 \cdot P(X=x_2, Y=y_m) + y_m \cdot P(X=x_2, Y=y_m) \\
\vdots \quad & \\
+ \quad & x_n \cdot P(X=x_n, Y=y_1) + y_1 \cdot P(X=x_n, Y=y_1) \\
+ \quad & x_n \cdot P(X=x_n, Y=y_2) + y_2 \cdot P(X=x_n, Y=y_2) \\
\vdots \quad & \\
+ \quad & x_n \cdot P(X=x_n, Y=y_m) + y_m \cdot P(X=x_n, Y=y_m)
\end{aligned}
$$

Die Summanden werden getrennt nach x_i und y_j:

$$
\begin{aligned}
E(X+Y) = \quad & x_1 \cdot P(X=x_1, Y=y_1) \\
+ \quad & x_1 \cdot P(X=x_1, Y=y_2) \\
+ \quad & x_1 \cdot P(X=x_1, Y=y_3) \\
\vdots \quad & \\
+ \quad & x_1 \cdot P(X=x_1, Y=y_m) \\
\\
+ \quad & x_2 \cdot P(X=x_2, Y=y_1) \\
+ \quad & x_2 \cdot P(X=x_2, Y=y_2) \\
\vdots \quad & \\
+ \quad & x_2 \cdot P(X=x_2, Y=y_m) \\
\vdots \quad & \\
+ \quad & x_n \cdot P(X=x_n, Y=y_1) \\
+ \quad & x_n \cdot P(X=x_n, Y=y_2) \\
\vdots \quad & \\
+ \quad & x_n \cdot P(X=x_n, Y=y_m) \\
\\
+ \quad & y_1 \cdot P(X=x_1, Y=y_1) \\
+ \quad & y_2 \cdot P(X=x_1, Y=y_2) \\
+ \quad & y_3 \cdot P(X=x_1, Y=y_3) \\
\vdots \quad & \\
+ \quad & y_m \cdot P(X=x_1, Y=y_m) \\
\\
+ \quad & y_1 \cdot P(X=x_2, Y=y_1) \\
+ \quad & y_2 \cdot P(X=x_2, Y=y_2) \\
\vdots \quad & \\
+ \quad & y_m \cdot P(X=x_2, Y=y_m) \\
\vdots \quad &
\end{aligned}
$$

Erwartungswert einer Summe diskreter Zufallsvariabler

$$
\begin{aligned}
+\quad & y_1 \cdot P(X = x_n, Y = y_1) \\
+\quad & y_2 \cdot P(X = x_n, Y = y_2) \\
\vdots \quad & \\
+\quad & y_m \cdot P(X = x_n, Y = y_m)
\end{aligned}
$$

Die Summanden, die y_j enthalten, werden nach y_1, y_2, y_3 usw. sortiert:

$$
\begin{aligned}
E(X+Y) = \quad & x_1 \cdot P(X = x_1, Y = y_1) \\
+\quad & x_1 \cdot P(X = x_1, Y = y_2) \\
+\quad & x_1 \cdot P(X = x_1, Y = y_3) \\
\vdots \quad & \\
+\quad & x_1 \cdot P(X = x_1, Y = y_m) \\
\\
+\quad & x_2 \cdot P(X = x_2, Y = y_1) \\
+\quad & x_2 \cdot P(X = x_2, Y = y_2) \\
\vdots \quad & \\
+\quad & x_2 \cdot P(X = x_2, Y = y_m) \\
\vdots \quad & \\
+\quad & x_n \cdot P(X = x_n, Y = y_1) \\
+\quad & x_n \cdot P(X = x_n, Y = y_2) \\
\vdots \quad & \\
+\quad & x_n \cdot P(X = x_n, Y = y_m) \\
\\
+\quad & y_1 \cdot P(X = x_1, Y = y_1) \\
+\quad & y_1 \cdot P(X = x_2, Y = y_1) \\
\vdots \quad & \\
+\quad & y_1 \cdot P(X = x_n, Y = y_1) \\
\\
+\quad & y_2 \cdot P(X = x_1, Y = y_2) \\
+\quad & y_2 \cdot P(X = x_2, Y = y_2) \\
\vdots \quad & \\
+\quad & y_2 \cdot P(X = x_n, Y = y_2) \\
\\
+\quad & y_3 \cdot P(X = x_1, Y = y_3) \\
+\quad & y_3 \cdot P(X = x_2, Y = y_3) \\
\vdots \quad & \\
+\quad & y_3 \cdot P(X = x_n, Y = y_3) \\
\vdots \quad & \\
+\quad & y_m \cdot P(X = x_1, Y = y_m) \\
+\quad & y_m \cdot P(X = x_2, Y = y_m) \\
\vdots \quad & \\
+\quad & y_m \cdot P(X = x_n, Y = y_m)
\end{aligned}
$$

Hieraus können jeweils x_i und y_j mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ausgeklammert werden:

$$
\begin{aligned}
E(X+Y) = \quad & x_1 \cdot P(X = x_1) \cdot \left[P(Y = y_1) + P(Y = y_2) \ldots + P(Y = y_m)\right] \\
+\quad & x_2 \cdot P(X = x_2) \cdot \left[P(Y = y_1) + P(Y = y_2) \ldots + P(Y = y_m)\right] \\
\vdots \quad &
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad x_n \cdot P(X = x_n) \cdot \left[P(Y = y_1) + P(Y = y_2) \ldots + P(Y = y_m) \right] \\
&+ \quad y_1 \cdot P(Y = y_1) \cdot \left[P(X = x_1) + P(X = x_2) \ldots + P(X = x_n) \right] \\
&+ \quad y_2 \cdot P(Y = y_2) \cdot \left[P(X = x_1) + P(X = x_2) \ldots + P(X = x_n) \right] \\
&\vdots \\
&+ \quad y_m \cdot P(Y = y_m) \cdot \left[P(X = x_1) + P(X = x_2) \ldots + P(X = x_n) \right]
\end{aligned}
$$

Nun gilt

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) \ldots + P(X = x_n) = \sum_i P(X = x_i) = 1$$

und

$$P(Y = y_1) + P(Y = y_2) \ldots + P(Y = y_m) = \sum_j P(Y = y_j) = 1$$

Die eckigen Klammern in obigem Ausdruck lassen sich also sämtlich durch 1 ersetzen, sodass:

$$
\begin{aligned}
E(X + Y) = \quad & \quad x_1 \cdot P(X = x_1) \\
&+ \quad x_2 \cdot P(X = x_2) \\
&\vdots \\
&+ \quad x_n \cdot P(X = x_n) \\
&+ \quad y_1 \cdot P(Y = y_1) \\
&+ \quad y_2 \cdot P(Y = y_2) \\
&\vdots \\
&+ \quad y_m \cdot P(Y = y_m)
\end{aligned}
$$

Dies lässt sich auch folgendermaßen formulieren:

$$E(X + Y) = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i) + \sum_j y_j \cdot P(Y = y_j)$$

Hierin Gleichung (1) und Gleichung (2) eingesetzt:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$