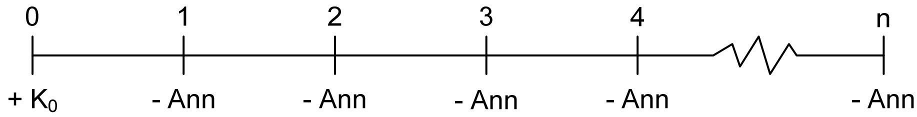
Die Berechnung eines Annuitätendarlehens

Wird ein Kredit in Höhe von K_0 aufgenommen und mit dem Effektivzinssatz r jährlich nachschüssig verzinst, dann ist nach einer Laufzeit von n Jahren der Betrag $K_0(1 + r)^n$ zurückzuzahlen, wenn die Rückzahlung des Kredites nebst Zinsen für die gesamte Laufzeit am Ende in einer Summe erfolgt.

Der Grundgedanke eines Annuitätendarlehens ist hingegen, die Verzinsung und die Rückzahlung des Kredites gleichmäßig auf die gesamte Laufzeit zu verteilen. „Gleichmäßig“ heißt hierbei, dass die Zahlungen in gleichen Zeitabständen erfolgen und stets gleich hoch sind. Ein solcher Betrag wird als Annuität bezeichnet.

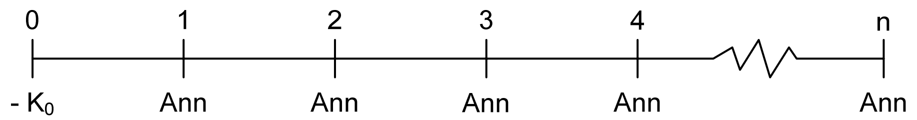
Vom Kreditnehmer aus gesehen ergibt sich also folgendes Bild der Zahlungen:



wobei:

K_0	=	Ursprünglicher Kreditbetrag (Auszahlungsbetrag)
Ann	=	Annuität
n	=	Laufzeit

Als Investition des Kreditgebers betrachtet, kehren sich die Vorzeichen der Zahlungen um:



Für die Berechnung der Annuität ist es unerheblich, welchen Standpunkt man einnimmt; wesentlich ist nur, dass K_0 und *Ann* ein unterschiedliches Vorzeichen haben. Mit jeder Annuität wird ein Teil des Kredites zurückgezahlt und verzinst. Die Frage ist, welcher Teil.

Sei TB_1 der Teilbetrag des Kredits, der mit der Annuität des Zeitpunktes 1 zurückgezahlt und verzinst werden kann, dann ist für einen Kredit in Höhe von TB_1 zum Effektivzinssatz r nach einem Jahr der Betrag TB_1 als Tilgung zu zahlen und der Betrag $TB_1 \cdot r$ an Zinsen, insgesamt also $TB_1(1 + r)$. Dieser Betrag ist durch die Annuität des Zeitpunkts 1 zu begleichen. Es muss also gelten:

$$\mathrm{TB}_1\left(1+r\right) = \mathrm{Ann}$$

Der Teilbetrag TB_2 des Kredits, der mit der Annuität des Zeitpunkts 2 getilgt und verzinst werden kann, muss nach zwei Jahren durch die Annuität zurückgezahlt werden. Bis dahin ist der Kredit auf

$$\mathrm{TB}_2\left(1+r\right)^2 = \mathrm{Ann}$$

angewachsen. Entsprechend muss für die übrigen Teilbeträge gelten:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{TB}_3\left(1+r\right)^3 = \mathrm{Ann} \\
&\mathrm{TB}_4\left(1+r\right)^4 = \mathrm{Ann} \\
&\vdots \\
&\mathrm{TB}_n\left(1+r\right)^n = \mathrm{Ann}
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen nach den jeweiligen Teilbeträgen des Kredits umgestellt:

Die Berechnung eines Annuitätendarlehens

$$
\begin{aligned}
TB_1 &= \frac{Ann}{1+r} \\
TB_2 &= \frac{Ann}{(1+r)^2} \\
TB_3 &= \frac{Ann}{(1+r)^3} \\
&\vdots \\
TB_n &= \frac{Ann}{(1+r)^n}
\end{aligned}
$$

Die Summe der einzelnen Teilbeträge muss nun insgesamt den Kredit K_0 ausmachen, sodass:

$$K_0 = TB_1 + TB_2 \ldots + TB_n$$

Die Summe der Teilbeträge ist nach den obigen Gleichungen aber auch:

$$\frac{Ann}{1+r} + \frac{Ann}{(1+r)^2} \ldots + \frac{Ann}{(1+r)^n}$$

Somit gilt:

(1) $$K_0 = \frac{Ann}{1+r} + \frac{Ann}{(1+r)^2} \ldots + \frac{Ann}{(1+r)^n}$$

Der ursprüngliche Kreditbetrag eines Annuitätendarlehens ist also gegeben durch die mit dem Effektivzinssatz abgezinsten Annuitäten.

Mithilfe des Barwertsummenfaktors lässt sich für Gleichung (1) schreiben:

(2) $$K_0 = Ann \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r \cdot (1+r)^n}$$

Hieraus folgt die Definition der nachschüssigen Annuität bei jährlichen Zinseszinsen:

(3) $$Ann = K_0 \cdot \frac{r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

Die Formel für die Berechnung der Annuität lässt sich verallgemeinern für den Fall unterjähriger Zahlungen und Zinsberechnungen. Sei *z* die Anzahl der Zahlungen pro Jahr, auf welche die Annuität aufgeteilt wird, und *m* die Anzahl der Zinsberechnungen pro Jahr, dann gilt für den regelmäßigen (nachschüssigen) Zahlungsbetrag, mit dem das Annuitätendarlehen verzinst und getilgt wird:

(4) $$\frac{Ann}{z} = K_0 \cdot \frac{\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{z}} - 1\right] \cdot \left(1+\frac{r}{m}\right)^{m \cdot n}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}$$

Es sei darauf hingewiesen, dass nach § 6 Abs. 2 Satz 3 PAngV (Preisangabenverordnung) die „exponentielle Verzinsung auch im unterjährigen Bereich" gilt. Ermittelt man den effektiven Jahreszinssatz mithilfe von Gleichung (4), bedeutet dies, dass $m = 1$ sein muss, auch wenn die Zahlungen unterjährig stattfinden ($z > 1$). Der effektive Jahreszinssatz ist dann kein periodenkonformer Zinssatz ($m = z$).