Exponentielle und periodenkonforme Verzinsung im unterjährigen Bereich

Ein Kredit in Höhe von K_0, der jährlich mit dem Effektivzinssatz *r* zu verzinsen ist, erfordert nach einem Jahr $K_0 \cdot r$ an Zinsen. Wird der Kredit nebst Zinsen genau nach einem Jahr zurückgezahlt, beträgt die Zahlung also $K_0 + K_0 \cdot r = K_0 \cdot (1+r)$.

Ist die Laufzeit des Kredits länger als ein Jahr und wurde vereinbart, dass nicht gezahlte Zinsen wieder Zinsen tragen, ist der Kredit nach der Zinsberechnung im Zeitpunkt 1 (ein Jahr nach der Auszahlung des Kredits im Zeitpunkt 0)

$$K_1 = K_0 \cdot (1+r)$$

Die Höhe des Kredits im Zeitpunkt 1 ist Grundlage für die Zinsberechnung im Zeitpunkt 2. Für K_2 ergibt sich

$$K_2 = K_0 \cdot (1+r) + K_0 \cdot (1+r) \cdot r = K_0 \cdot (1+r)^2$$

und entsprechend für K_3

$$K_3 = K_0 \cdot (1+r)^2 + K_0 \cdot (1+r)^2 \cdot r = K_0 \cdot (1+r)^3$$

Auf welchen Betrag ist der Kredit nun nach einer Laufzeit von *n* Jahren angewachsen, das heißt, wie hoch ist K_n? Am Ende des Jahres *n* werden die Zinsen für dieses Jahr auf den zu Beginn des Jahres vorhandenen Stand des Kredits berechnet, auf K_{n-1}:

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot r = K_{n-1} \cdot (1+r)$$

Die Erhöhung der Laufzeit um 1 führt zur Multiplikation des Anfangswertes der Periode mit $1+r$. Der Anfangswert K_0 wird nach Ablauf der ersten Periode mit $1+r$ multipliziert, der damit erreichte Wert wird nach der zweiten Periode ebenfalls mit $1+r$ multipliziert, der Wert am Ende der zweiten Periode wird am Ende der dritten Periode wieder mit $1+r$ multipliziert, bis nach *n* Perioden der Anfangswert K_0 *n* Mal mit $1+r$ multipliziert wurde und K_n bildet:

$$K_n = K_0 \cdot \underbrace{(1+r) \cdot (1+r) \cdot (1+r) \ldots \cdot (1+r)}_{\text{n Mal}}$$

Die n-fache Multiplikation eines Faktors mit sich selbst wird durch die Potenz ausgedrückt:

$$\underbrace{(1+r) \cdot (1+r) \cdot (1+r) \ldots \cdot (1+r)}_{\text{n Mal}} = (1+r)^n$$

Damit gilt für K_n

(1) $$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

Man sagt, K_0 wird auf K_n aufgezinst. Da die Verzinsung des Kapitals durch eine Exponentialfunktion gegeben wird, bezeichnet man diese Art der Aufzinsung auch als exponentielle Verzinsung.

Gleichung (1) wurde abgeleitet unter der Voraussetzung, dass die Zinsen dem Kapital jeweils am Ende eines ganzen Jahres zugeschlagen werden. Das heißt, es wurden ganzzahlige Werte von *n* vorausgesetzt. Gilt die Formel aber auch für nicht ganzzahlige Werte?

Dies zeigt die Untersuchung der Stetigkeit. Eine Funktion, die überall stetig ist, gilt für alle reellen Zahlen, und das sind alle Zahlen der Zahlengerade, nicht nur die ganzzahligen. Eine Funktion $f(x)$ ist für alle *x* stetig, wenn

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$$

Für die Funktion $K_0 \cdot (1+r)^n$ mit *n* als Variable ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta n \to 0} K_0 \cdot (1+r)^{n+\Delta n} = \lim_{\Delta n \to 0} K_0 \cdot (1+r)^n \cdot (1+r)^{\Delta n} \\
&= K_0 \cdot (1+r)^n \cdot (1+r)^0 \\
&= K_0 \cdot (1+r)^n \cdot 1 \\
&= K_0 \cdot (1+r)^n
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang führt also zur ursprünglichen Funktion. Die Bedingung $\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$ ist für $K_0 \cdot (1+r)^n$ erfüllt, die Funktion ist überall stetig und gilt für alle reellen Zahlen. Das heißt, die exponentielle Verzinsung ist auch auf Bruchteile von Jahren anwendbar, im unterjährigen Bereich.

Es ist nun keineswegs naturgegeben, dass Zinsen nur einmal im Jahr dem Kapital zugeschlagen werden. Das können Kreditgeber und Kreditnehmer vereinbaren wie sie wollen. Im Folgenden sei davon ausgegangen, dass die Zinsen *m* Mal im Jahr in gleichmäßigen Zeitabständen berechnet und dem Kapital zugeschlagen werden. Der Zeitraum, nach dessen Ablauf Zinsen berechnet werden, die Zinsperiode, ist dann nicht immer ein Jahr, sondern der durch *m* gegebene Bruchteil des Jahres, also $\frac{1}{m}$ Jahre. Für $m = 12$ entsprechen $\frac{1}{m}$ Jahre dem Monat, für $m = 4$ dem Vierteljahr, und für $m = 1$ natürlich dem Jahr.

Wie berechnen sich nun aber die Zinsen? Hierfür sei der Zeitpunkt der ersten Zinsberechnung nach $\frac{1}{m}$ Jahren betrachtet. Wie hoch ist also $K_{\frac{1}{m}}$?

Es liegt nahe, den Grundgedanken jährlicher Zinsberechnung auf den unterjährigen Bereich anzuwenden. Jahreszinsen werden berechnet, indem das Kapital zu Beginn des Jahres mit dem Jahreszinssatz multipliziert wird. Monatszinsen werden berechnet, indem das Kapital zu Beginn des Monats mit dem Monatszinssatz multipliziert wird. Ist die Zinsperiode der zwölfte Teil des Jahres, dann ist auch der Monatszinssatz der zwölfte Teil des Jahreszinssatzes. Ist die Zinsperiode der m. Teil des Jahres, dann ist auch der anzuwendende Zinssatz der m. Teil des Jahreszinssatzes. Der Jahreszinssatz wird einfach durch *m* geteilt und ergibt dann einen Zinssatz, den man als periodenkonform bezeichnen kann.

Auf dieser Basis lässt sich Gleichung (1) für periodenkonforme Zinssätze verallgemeinern. Statt *r* wird der periodenkonforme Zinssatz $\frac{r}{m}$ gesetzt, und die Anzahl der Jahre im Exponenten wird ersetzt durch die Anzahl der Zinsperioden $m \cdot n$, sodass

(2) $$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n}$$

Diese Verzinsungsmethode sei als periodenkonforme Verzinsung bezeichnet.

Exponentielle und periodenkonforme Verzinsung im unterjährigen Bereich

Der Index von *K* bleibt weiterhin die Zeitdauer in Jahren. Das Kapital nach der ersten Zinsperiode ist $K_{\frac{1}{m}}$, nach der zweiten $K_{\frac{2}{m}}$, nach $m \cdot n$ Zinsperioden (am Ende der Laufzeit) $K_{\frac{m \cdot n}{m}} = K_n$.

Für $K_{\frac{1}{m}}$ ergibt sich nach der periodenkonformen Verzinsung gemäß Gleichung (2)

$$K_{\frac{1}{m}} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^1$$

Die Zinsen für die erste Zinsperiode sind

$$\begin{aligned} K_{\frac{1}{m}} - K_0 &= K_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^1 - K_0 \\ &= K_0 + K_0 \cdot \frac{r}{m} \cdot 1 - K_0 \\ &= K_0 \cdot \frac{r}{m} \end{aligned}$$

Wie von der Methode vorausgesetzt ergeben sich die Zinsen für die erste Zinsperiode $\frac{1}{m}$ aus dem Anfangskapital der Periode, hier K_0, multipliziert mit dem für diese Periode gültigen Zinssatz $\frac{r}{m}$.

Es versteht sich, dass diese Berechnungsmethode für jede Zinsperiode gilt: Sei das Anfangskapital der Periode $K_{\frac{n}{m}}$, dann ist das Kapital eine Periode später, nach $\frac{n+1}{m}$ Jahren

$$K_{\frac{n+1}{m}} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n + 1}$$

Das Kapital eine Periode zuvor war

$$K_{\frac{n}{m}} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n}$$

Die Zinsen sind die Differenz beider Beträge:

$$\begin{aligned} K_{\frac{n+1}{m}} - K_{\frac{n}{m}} &= K_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n + 1} - K_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n} \\ &= K_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n} \cdot \left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^1 - 1\right] \\ &= K_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n} \cdot \frac{r}{m} \end{aligned}$$

Die Zinsen sind also auch hier das Anfangskapital der Periode, $K_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n}$, multipliziert mit dem Zinssatz der Periode, $\frac{r}{m}$.

Exponentielle und periodenkonforme Verzinsung im unterjährigen Bereich

Die jedem Kaufmann sofort einleuchtende Zinsberechnungsmethode, das Anfangskapital einer Zinsperiode mit dem Zinssatz für diese Periode zu multiplizieren, bleibt hingegen bei der exponentiellen Verzinsung im unterjährigen Bereich nicht erhalten. Betrachtet man nur die erste Periode $\frac{1}{m}$, so ist das Kapital K_0 nach $\frac{1}{m}$ Jahren auf $K_0 \cdot (1+r)^{\frac{1}{m}}$ angewachsen. Die Zinsen sind

$$K_0 \cdot (1+r)^{\frac{1}{m}} - K_0 = K_0 \cdot \left[(1+r)^{\frac{1}{m}} - 1\right]$$

Das ist nicht das Anfangskapital, multipliziert mit dem Zinssatz, denn

$$(1+r)^{\frac{1}{m}} - 1 \neq r \quad \text{für } m \neq 1$$

Dies gilt für jede beliebige Zinsperiode mit der Länge $\frac{1}{m}$ Jahre: Sei das erreichte Anfangskapital $K_{\frac{n}{m}}$, dann wächst das Kapital nach weiteren $\frac{1}{m}$ Jahren auf $K_{\frac{n+1}{m}} = K_{\frac{n}{m}} \cdot (1+r)^{\frac{1}{m}}$. Die Zinsen für diese Periode sind

$$K_{\frac{n}{m}} \cdot (1+r)^{\frac{1}{m}} - K_{\frac{n}{m}} = K_{\frac{n}{m}} \cdot \left[(1+r)^{\frac{1}{m}} - 1\right]$$

Der Zinsfaktor ist also wie in der ersten Periode $(1+r)^{\frac{1}{m}} - 1$, und es gilt

$$(1+r)^{\frac{1}{m}} - 1 \neq r \quad \text{für } m \neq 1$$

Die dem Kaufmann einleuchtende Zinsberechnung

$$\text{Zinsen der Periode} = \text{Anfangskapital der Periode} \cdot \text{Zinssatz}$$

gilt bei der exponentiellen Methode nur bei $m = 1$, das heißt nur bei ganzzahligen Laufzeiten in Jahren, nicht im unterjährigen Bereich.

Auch Kaufleute können aber vermittels eines Computers oder eines Taschenrechners exponentielle Funktionen berechnen, sodass die leichte Nachvollziehbarkeit der Zinsberechnung kein Auswahlkriterium für die Wahl der Zinsberechnungsmethode ist.

Ein Problem besteht vielmehr darin, dass die beiden Methoden bei gleichem Zinssatz zu unterschiedlichen Ergebnissen führen, wenn $m \neq 1$ ist. Beispielsweise würde ein Kredit über 100.000, der jährlich mit 10 % zu verzinsen und nach 10 Jahren in einer Summe zurückzuzahlen ist, nach Gleichung (1) eine Rückzahlung nebst Zinsen in Höhe von 259.374 erfordern, bei $m = 12$ (monatliche Verzinsung) wären es 270.704 – bei gleichem Zinssatz.

Die unterschiedlichen Methoden stören also die Vergleichbarkeit von Kreditangeboten. So ist es kein Wunder, dass in Deutschland für die Berechnung von Effektivzinssätzen die exponentielle Berechnung auch im unterjährigen Bereich vorgeschrieben ist (§ 6 Abs. 2 Satz 3 PAngV mit Verweis auf die Anlage[1]).

[1] Im Gegensatz zu früheren Fassungen der Preisangabenverordnung wird nicht mehr explizit gesagt, dass die "exponentielle Verzinsung auch im unterjährigen Bereich" gilt. Dies ergibt sich aber aus der angegebenen Formel.

Exponentielle und periodenkonforme Verzinsung im unterjährigen Bereich

Allerdings lassen sich die nach den beiden Methoden ermittelten Zinssätze leicht in ineinander umrechnen. Die Zinssätze sind äquivalent, wenn die beiden Methoden zum gleichen Ergebnis führen. Wird zur Unterscheidung in Gleichung (2) der Zinssatz mit r_m bezeichnet, so muss für die Äquivalenz gelten

$$K_0 \cdot (1+r)^m = K_0 \cdot \left(1+\frac{r_m}{m}\right)^{m\cdot n}$$

$$(1+r)^n = \left(1+\frac{r_m}{m}\right)^{m\cdot n}$$

$$1+r = \left(1+\frac{r_m}{m}\right)^{m}$$

$$r = \left(1+\frac{r_m}{m}\right)^{m} - 1$$

Für den Kredit mit den Daten

$$\begin{aligned} K_0 &= 100.000 \\ K_n &= 270.704 \\ n &= 10 \\ m &= 12 \\ r_m &= 10,00\ \% \end{aligned}$$

ist der äquivalente Zinssatz nach der exponentiellen Zinsberechnung auch im unterjährigen Bereich

$$r = \left(1+\frac{0,1}{12}\right)^{12} - 1 = 10,47\,\%$$

Dass dieser Kredit ungünstiger ist als derjenige mit einem Rückzahlungsbetrag von 259.374, sieht man hier zwar auf den ersten Blick, aber so einfach sind die Zahlen nicht immer.