Zinseszinsrechnung

Gegeben sei ein Kapital von K_0, welches mit einem Jahreszins von i verzinst wird. Die Zinsen werden jeweils nach einem Jahr dem Kapital zugeschlagen. Wie hoch ist das Kapital K_t nach t Jahren?

Für K_1 gilt:

(1.1) $K_1 = K_0 + K_0 \cdot i$

(1.2) $K_1 = K_0(1+i)$

Das Anfangskapital des zweiten Jahres ist also $K_0(1+i)$. Wird dieser Betrag wieder nach einem Jahr mit i verzinst, so gilt für K_2, das Kapital nach zwei Jahren:

(1.3) $K_2 = K_0(1+i) + K_0(1+i) \cdot i$

(1.4) $K_2 = K_0(1+i)^2$

Da sich das Kapital am Ende jeden Jahres aus dem Anfangskapital zu Beginn des Jahres und dem mit dem Zinssatz multiplizierten Anfangskapital zusammensetzt, kann das Anfangskapital stets ausgeklammert werden, und in der Klammer verbleibt der Faktor 1 + i. Mit diesem Faktor wächst das Kapital jedes Jahr an, sodass nach t Jahren gilt:

(1.5) $K_t = K_0(1+i)^t$

Mit dieser Formel, der allgemeinen Zinseszinsformel, kann der Zusammenhang zwischen dem Kapital K_0 und K_t hergestellt werden: Ein Kapital wächst bei jährlichen Zinseszinsen mit dem Zinssatz i nach t Jahren auf K_t an. Man spricht davon, dass das Kapital aufgezinst wird. K_0 und K_t sind einander gleichwertig, da durch die Aufzinsung K_0 in K_t verwandelt (transformiert) werden kann.

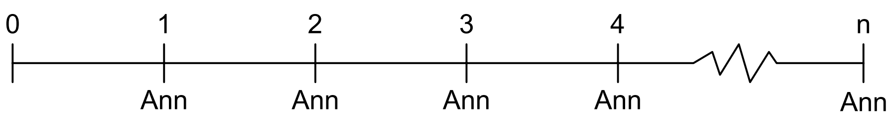
Verfügt andererseits ein Investor über die Gewissheit, dass er im Zeitpunkt t den Betrag K_t erhalten wird, kann er diesen Betrag in einen äquivalenten Betrag zum Zeitpunkt 0 verwandeln, indem er K_0 als Kredit aufnimmt - allerdings unter der Voraussetzung, dass der Kredit zu i erhältlich ist. Nach t Jahren ist bei jährlichen Zinseszinsen und ohne vorzeitige Kapitalrückführung genau K_t als ursprünglicher Kreditbetrag nebst Zinsen zurückzuzahlen. Wie hoch dieser mögliche Kredit auf K_t ist, ergibt sich durch Umstellung von (1.5) nach K_0:

(1.6) $K_0 = \dfrac{K_t}{(1+i)^t}$

Man spricht davon, dass K_t auf den Zeitpunkt 0 abgezinst wird. Der Wert von K_t im Zeitpunkt 0 wird als Barwert bezeichnet.

Mit Hilfe der Auf- und Abzinsung können Beträge beliebig zeitlich transformiert werden, jedoch immer unter der Voraussetzung, dass beliebige Beträge zum Zinssatz i angelegt und als Kredit aufgenommen werden können (Voraussetzung des vollkommenen Kapitalmarktes).

Wenn ein Investor mehrere Beträge in der Zukunft erwarten kann und er wissen will, wie hoch der Barwert dieser Zahlungsreihe ist, müssen die Beträge jeweils für ihre Laufzeit t (die Zeit vom Zeitpunkt 0 bis zum Eintritt der Zahlung) abgezinst werden. Von besonderem Interesse sind solche Zahlungen, die regelmäßig am Ende des Jahres in gleicher Höhe anfallen. Wird dieser gleichbleibende Zahlungsbetrag (Annuität) mit *Ann* bezeichnet und fallen diese Zahlungen in den Zeitpunkten t = 1..n an (n = Zeitpunkt der letzten Zahlung), so lässt sich diese Zahlungsreihe folgendermaßen darstellen:



Der Barwert BW dieser Zahlungsreihe ist:

Zinseszinsrechnung

(2.1) $BW = \frac{Ann}{1+i} + \frac{Ann}{(1+i)^2} + \frac{Ann}{(1+i)^3} ... + \frac{Ann}{(1+i)^n}$

Multipliziert man diese geometrische Reihe mit dem sie konstituierenden Faktor $\frac{1}{1+i}$, so erhält man:

(2.2) $BW \cdot \frac{1}{1+i} = \frac{Ann}{(1+i)^2} + \frac{Ann}{(1+i)^3} ... + \frac{Ann}{(1+i)^n} + \frac{Ann}{(1+i)^{n+1}}$

Die Differenz von (2.1) und (2.2) ergibt:

(2.3) $BW - BW \cdot \frac{1}{1+i} = \frac{Ann}{1+i} - \frac{Ann}{(1+i)^{n+1}}$

(2.4) $BW \cdot \frac{i}{1+i} = \frac{Ann}{1+i} - \frac{Ann}{(1+i)^{n+1}}$

(2.5) $BW \cdot i = Ann - \frac{Ann}{(1+i)^n}$

(2.6) $BW = Ann \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$

Der Faktor $\frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$, mit dem die Zahlung *Ann* multipliziert werden muss, um den Barwert der Zahlungsreihe zu erhalten, wird Barwertsummenfaktor genannt.

Löst man (2.6) nach *Ann* auf, so erhält man:

(2.7) $Ann = BW \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$

Um einen Barwert in eine äquivalente Zahlungsreihe mit gleichbleibenden Beträgen über n Jahre zu verwandeln, muss der Barwert mit dem Kehrwert des Barwertsummenfaktors multipliziert werden. Dieser Kehrwert wird auch Kapitalwiedergewinnfaktor genannt.

Für $n \rightarrow \infty$ (ewige Rente) vereinfachen sich die Faktoren. Aus (2.6) folgt

(2.8) $BW = \frac{Ann}{i} - \frac{Ann}{i \cdot (1+i)^n}$

(2.9) $\lim_{n \to \infty} BW = \frac{Ann}{i}$

(2.10) $BW = \frac{Ann}{i}$

und

(2.11) $Ann = i \cdot BW$