Zum Problem unterjähriger Zinsen und Zahlungen in der Zinseszinsrechnung

Gewöhnlich geht man in der Zinseszinsrechnung davon aus, dass die Zinsen nach einem Jahr dem Kapital zugeschlagen werden und dann wieder Zinsen tragen. Der Zinssatz, mit dem das Kapital multipliziert wird, um die Zinsen zu berechnen, ist deswegen auf das Jahr bezogen, er ist ein Jahreszinssatz. Ebenso wird die Zeit in Jahren bemessen.

Mit

K_t	=	Kapital im Zeitpunkt t
K_0	=	Kapital im Zeitpunkt 0
i	=	Jahreszinssatz
t	=	Zeit [Jahre]

ergibt sich die klassische Zinseszinsformel

(1) $$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t$$

Die Herleitung dieser Formel gilt nun wegen der Annahme jährlicher Zinseszinsen nur für ganzzahlige Werte von t. Jedoch ist die Funktion auch für nicht ganzzahlige Werte definiert. So gilt beispielsweise für $t = 0,5$, $K_0 = 100$ und $i = 0,1$

(2) $$K_{0,5} = 100 \cdot 1,1^{0,5} = 104,88$$

Indessen würde keine Bank der Welt so rechnen. Zinsen errechnet man, indem das Kapital mit dem Zinssatz multipliziert wird. Hätte das Kapital von 100 ein Jahr auf Zinsen von 10 % gelegen, wären die Zinsen $100 \cdot 0,1 = 10$. Wenn das Kapital nur für ein halbes Jahr verzinst wird, nimmt man den halben Jahreszinssatz, hier also 5 %, sodass die Zinsen $100 \cdot 0,05 = 5$ betragen. Nach einem halben Jahr ist das Kapital 105 und nicht 104,88.

Werden nun aber die Zinsen nach einem halben Jahr dem Kapital zugeschlagen und wird dieses neue Kapital wieder für ein halbes Jahr verzinst, so ergibt sich $105 + 0,05 \cdot 105 = 110,25$ – also mehr als bei jährlichen Zinseszinsen. Dagegen ergibt der Betrag von 104,88 bei jährlichen Zinseszinsen nach einem weiteren halben Jahr $104,88 \cdot 1,1^{0,5} = 110$.

Das Endkapital hängt also davon ab, wie häufig innerhalb eines Jahres die Zinsen dem Kapital zugeschlagen werden. Bei jährlichen Zinseszinsen wird das zu verzinsende Kapital mit i multipliziert, bei halbjährlichen Zinseszinsen mit $\frac{i}{2}$, bei vierteljährlichen Zinseszinsen mit $\frac{i}{4}$, bei monatlichen Zinseszinsen mit $\frac{i}{12}$ und bei m Zinszahlungen im Jahr mit $\frac{i}{m}$.

Wenn m Mal im Jahr Zinsen gezahlt werden, ist der Zeitraum zwischen zwei Zinsterminen $\frac{1}{m}$ Jahre. Diesen Zeitraum kann man auch als Zinsperiode oder Zinseszinsperiode bezeichnen. Nach Ablauf der Zinsperiode tragen Zinsen wieder Zinsen. Für das Kapital nach $\frac{1}{m}$ Jahren gilt

(3) $$K_{\frac{1}{m}} = K_0 + K_0 \cdot \frac{i}{m} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)$$

Nach $\frac{2}{m}$ Jahren ist das Kapital

(4) $$K_{\frac{2}{m}} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right) + K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right) \cdot \frac{i}{m} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^2$$

und nach $\frac{3}{m}$ Jahren

(5) $$K_{\frac{3}{m}} = K_0 \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^3$$

Man erkennt, dass nach jeder Zinsperiode das Anfangskapital mit dem Faktor $1+\frac{i}{m}$ vermehrt wird. Die Anzahl der insgesamt stattgefundenen Kapitalvermehrungen, also die Anzahl der abgelaufenen Zinsperioden, bildet den Exponenten. Betrachtet man allgemein den Zeitraum von t Jahren, dann ist die Zahl der Zinsperioden m · t. Im Index von K steht die abgelaufene Zeit in Jahren, also t. Die allgemeine, auch für unterjährige Zinsen gültige Zinseszinsformel lautet somit

(6) $$K_t = K_0 \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}$$

Es versteht sich, dass diese Formel für m = 1 mit der für jährliche Zinseszinsen gültigen Aufzinsungsformel (1) übereinstimmt. Mit den Daten des Beispiels t = 0,5, K_0 = 100, i = 0,1 und m = 2 ergibt sich indessen das erwartete Ergebnis für ein Kapital, das ein halbes Jahr auf Zinsen liegt:

$$K_{0,5} = 100 \cdot \left(1+\frac{0{,}1}{2}\right)^{2 \cdot 0{,}5} = 105$$

Wie oft im Jahr können nun Zinsen dem Kapital zugeschlagen werden? Eine Obergrenze dafür gibt es nicht. Der Fall $m \to \infty$ ist denkbar; und man muss sich fragen, wie hoch K_t in diesem Fall ist. Hierfür wird gesetzt

(7) $$\frac{i}{m} = \frac{1}{x}$$

sodass

(8) $$K_t = K_0 \cdot \left(1+\frac{1}{x}\right)^{m \cdot t}$$

Aus (7) folgt

(9) $$m = i \cdot x$$

Gleichung (9) in (8) eingesetzt:

(10) $$K_t = K_0 \cdot \left(1+\frac{1}{x}\right)^{i \cdot t \cdot x} = K_0 \cdot \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{i \cdot t}$$

Geht x gegen ∞, dann geht nach Gleichung (9) auch m gegen ∞, sodass es genügt, den Grenzübergang von Gleichung (10) für $x \to \infty$ durchzuführen. Für den in Gleichung (10) enthaltenen Ausdruck $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ gilt

(11) $$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Dies in Gleichung (10) eingesetzt, ergibt die Formel für die stetige Verzinsung:

(12) $$K_t = K_0 \cdot e^{i \cdot t}$$

Auf Investitionen und Finanzierungen wird die stetige Verzinsung wohl nur selten angewendet werden, sodass im Folgenden wieder von einem endlichen m ausgegangen wird. Es zeigt sich aber, dass eine Erhöhung der Häufigkeit von Zinszuschlägen das Kapitalwachstum nicht bis ins Unendliche steigert, sondern dass es eine Obergrenze hierfür gibt, die durch die Formel des stetigen Wachstums definiert ist.

Wendet man nun die Zinseszinsrechnung auf die Transformation von Kapitalbeträgen oder Zahlungen an, so muss man festlegen, wie häufig im Jahr Zinsen berechnet werden. Welches m ist für die Auf- und Abzinsung anzusetzen?

Es sei K_t eine als sicher betrachtete Einzahlung im Zeitpunkt t. Durch die Aufnahme eines Kredits kann diese Zahlung in eine Einzahlung im Zeitpunkt 0 verwandelt werden. Der Kredit darf so hoch sein, dass die Kapitalrückzahlung nebst Verzinsung im Zeitpunkt t gerade K_t beträgt.

Wenn der Kredit m Mal im Jahr verzinst wird, die Zinsen stehen bleiben und erst im Zeitpunkt t zusammen mit dem Kreditbetrag zurückgezahlt werden, entwickelt sich die Kredithöhe nebst Zinsen gemäß Gleichung (6) mit dem Faktor $\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot t}$. Teilt man K_t durch diesen Faktor, erhält man den Kreditbetrag im Zeitpunkt 0

(13) $$K_0 = \frac{K_t}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot t}}$$

Dieser auf den Barwert abgezinste Wert von K_t ergibt bei m Zinsterminen im Jahr nach t Jahren gerade K_t, womit der Kredit zurückgezahlt werden kann:

(14) $$\frac{K_t}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot t}} \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot t} = K_t$$

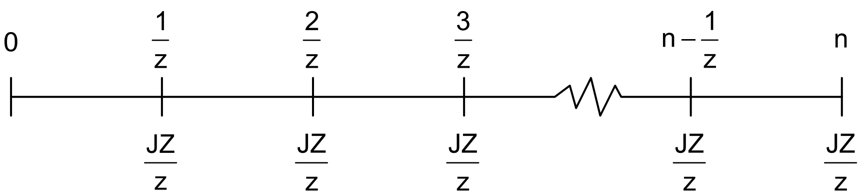
Ob nun Zinsen und Zinseszinsen jährlich oder in einem anderen Rhythmus anfallen, hängt offensichtlich nicht vom Zeitpunkt der zu transformierenden Zahlung ab, sondern von den Konditionen des Kredits, der zur Transformation der Zahlung benutzt wird.

Entsprechendes gilt, wenn zur Transformation von Zahlungen eine Kapitalanlage notwendig ist. Wenn K_t eine Auszahlung darstellt, die auf den Zeitpunkt 0 abgezinst werden soll, dann ist dies möglich durch eine Kapitalanlage in Höhe des abgezinsten Wertes von K_t entsprechend Gleichung (13). Die Kapitalanlage zu i führt dann zu einer Einzahlung in Höhe von K_t im Zeitpunkt t, mit der die anfallende Auszahlung gedeckt werden kann. Durch die Kapitalanlage tritt also per Saldo an die Stelle der Auszahlung im Zeitpunkt t eine Auszahlung im Zeitpunkt 0 in Höhe von K_0, dem mit i abgezinsten Wert von K_t.

Wenn sich in einer Zahlungsreihe Ein- und Auszahlungen mischen, könnte man für die Abzinsung der Einzahlungen einen anderen Wert von i verwenden als für die Auszahlungen, nämlich für die Einzahlungen den Kreditzins und für die Auszahlungen den Zinssatz für Kapitalanlagen. Der Zinssatz i, auch als Kalkulationszinssatz oder Kalkulationszinsfuß bezeichnet, würde sich dann für die Ein- und Auszahlungen unterscheiden. Mit einem derartig differenzierten Kalkulationszinsfuß wäre die ansonsten implizit gesetzte Prämisse des vollkommenen Kapitalmarktes aufgehoben.

In jedem Fall muss man feststellen, dass eine bestimmte Struktur der Zahlungen keineswegs eine bestimmte Prämisse hinsichtlich der Zinseszinsen impliziert. Die zu transformierenden Zahlungen sind gegeben, und der Rhythmus der Zinsberechnungen ist davon völlig unabhängig. Wann Zinsen fällig werden, ob nach einem Jahr, einem halben Jahr, einem Vierteljahr oder monatlich, das hängt allein davon ab, wie die Kredite oder die Kapitalanlagen verzinst werden, mit denen man die Zahlungen zeitlich transformiert. Das bedeutet für die Abzinsung zukünftiger Zahlungen zur Ermittlung ihrer Barwerte und auch für die Aufzinsung von Zahlungen zur Ermittlung ihrer Endwerte, dass Zahlungen beliebiger Zeitpunkte mit beliebigen Rhythmen der Zinseszinsberechnung kombiniert werden können.

Diese Erkenntnis führt zu einer genaueren Sicht auf einige Standardprobleme der Transformation von Zahlungen. Betrachtet man zunächst die Kapitalisierung von Renten, die in Form einer Annuität als gleich hohe und regelmäßige Zahlungen anfallen, dann muss der Barwertsummenfaktor um einen Parameter für die unterjährige Zahlungsstruktur und einen Parameter für die Zinstermine ergänzt werden. Es sei weiterhin i der Jahreszinssatz und m die Anzahl der Zinstermine im Jahr. Die Summe der jährlichen Zahlungen sei JZ. Diese Summe wird in z gleiche Zahlungen pro Jahr aufgeteilt. Für eine nachschüssige Rente, die n Jahre gezahlt wird, ergibt sich folgendes Bild:



Für die Abzinsung auf den Barwert BW wird der in Gleichung (6) definierte Faktor $\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot t}$

verwendet, wobei $t = \frac{1}{z}\ldots n$. Es ergibt sich

$$\text{(15)}\qquad BW = \frac{JZ}{z}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}}} + \frac{JZ}{z}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{2m}{z}}}\ldots + \frac{JZ}{z}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\left(n-\frac{1}{z}\right)\cdot m}} + \frac{JZ}{z}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}}$$

Multipliziert man diese geometrische Reihe mit dem sie konstituierenden Faktor $\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}}}$, erhält man

$$\text{(16)}\qquad BW\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}}} = \frac{JZ}{z}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{2m}{z}}}\ldots + \frac{JZ}{z}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}} + \frac{JZ}{z}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}}}$$

Die Differenz von (15) und (16) ist

$$BW - BW\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}}} = \frac{JZ}{z}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}}} - \frac{JZ}{z}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n+\frac{m}{z}}}$$

Hieraus folgt

$$BW\cdot\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}}}\right) = \frac{JZ}{z}\cdot\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n+\frac{m}{z}}}$$

$$BW\cdot\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}}} = \frac{JZ}{z}\cdot\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n+\frac{m}{z}}}$$

$$BW \cdot \left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}} - 1 \right] = \frac{JZ}{z} \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}}$$

(17)
$$BW = \frac{JZ}{z} \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}} - 1 \right] \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}}$$

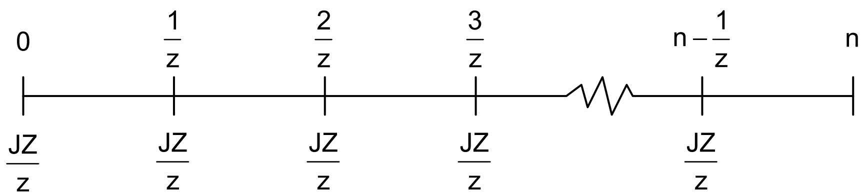
Mit

BW = Barwert
JZ = Jährlicher Zahlungsbetrag
z = Anzahl der Zahlungen pro Jahr
i = Jahreszinssatz
m = Anzahl der Zinstermine pro Jahr
n = Anzahl der jährlichen Zahlungsbeträge

ist Gleichung (17) die allgemeine Formel für die Abzinsung von nachschüssigen Renten in Form einer Annuität. Der in dieser Gleichung enthaltene Barwertsummenfaktor wird zu dem üblicherweise verwendeten, wenn m = 1 und z = 1 gesetzt wird, wenn man also von der Prämisse jährlicher Zahlungen und jährlicher Zinseszinsen ausgeht:

(18)
$$BW = JZ \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$$

Für den Fall einer vorschüssigen Rente ergibt sich folgendes Bild:



Der Barwert dieser Rente ist

(19)
$$BW = \frac{JZ}{z} + \frac{JZ}{z} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}}} + \frac{JZ}{z} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{2m}{z}}} \ldots + \frac{JZ}{z} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\left(n-\frac{1}{z}\right) \cdot m}}$$

Dies mit $\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}}}$ multipliziert:

(20)
$$BW \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}}} = \frac{JZ}{z} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}}} + \frac{JZ}{z} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{2m}{z}}} \ldots + \frac{JZ}{z} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot n - \frac{m}{z}}} + \frac{JZ}{z} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}}$$

Die Differenz von (19) und (20) ist

$$BW - BW \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}}} = \frac{JZ}{z} - \frac{JZ}{z} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}}$$

$$BW \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}} - 1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}}} = \frac{JZ}{z} \cdot \left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}}\right]$$

$$BW \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}} - 1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}}} = \frac{JZ}{z} \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}}$$

$$BW = \frac{JZ}{z} \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}} \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}} - 1}$$

$$BW = \frac{JZ}{z} \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}} - 1\right] \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot n - \frac{m}{z}}}$$

(21)
$$BW = \frac{JZ}{z} \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{z}} - 1\right] \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{\left(n-\frac{1}{z}\right) \cdot m}}$$

Dies ist die allgemeine Formel für die Abzinsung von vorschüssigen Renten in Form einer Annuität. Für $m = 1$ und $z = 1$ enthält die Bestimmungsgleichung für den Barwert wieder den üblicherweise verwendeten Barwertsummenfaktor, wenn vorschüssige Renten unter der Voraussetzung jährlicher Zahlungen und jährlicher Zinseszinsen abgezinst werden:

(22)
$$BW = JZ \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^{n-1}}$$

Jedoch sind Annuitäten Sonderfälle. Man kann nicht davon ausgehen, dass die Zahlungen einer Zahlungsreihe stets gleich hoch sind und in gleichem zeitlichen Abstand zueinander anfallen. Außerdem sind nicht alle Zahlungen gleichgerichtet. Deswegen muss deutlich gemacht werden, ob es sich bei einer bestimmten Zahlung um eine Einzahlung oder eine Auszahlung handelt.

Es sei zusätzlich zu den bereits verwendeten Symbolen definiert:

ta = Zeitpunkt einer Auszahlung
te = Zeitpunkt einer Einzahlung
A_{ta} = Auszahlung im Zeitpunkt ta
E_{te} = Einzahlung im Zeitpunkt te
BW_A = Barwert der Auszahlungen

BW_E = Barwert der Einzahlungen

Dann gilt für den Barwert der Auszahlungen einer Zahlungsreihe

(23) $$BW_A = \sum_{ta} \frac{A_{ta}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot ta}}$$

und entsprechend für den Barwert der Einzahlungen einer Zahlungsreihe

(24) $$BW_E = \sum_{te} \frac{E_{te}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot te}}$$

Wenn es sich bei den Auszahlungen und Einzahlungen um eine Investition handelt, stellt BW_A die Summe aller auf den Zeitpunkt 0 zeitlich transformierten Auszahlungen dar. Wenn die Auszahlungen nicht ohnehin schon im Zeitpunkt 0, dem Beginn der Investition, anfallen, dann lassen sich durch geeignete Kapitalanlagen oder andere Investitionen zukünftige Auszahlungen zum Zinssatz i auf den Zeitpunkt 0 verlagern. Die auf den Zeitpunkt 0 verlagerten Einzahlungen aus der Investition werden durch BW_E dargestellt. Möglich wird diese zeitliche Transformation durch Kredite zum Zinssatz i, dem Kalkulationszinsfuß.

Wenn auf diese Weise alle Zahlungen auf den Zeitpunkt 0 bezogen sind und sich ein Überschuss der Einzahlungen über die Auszahlungen ergibt, dann wird dieser Überschuss nicht für die Finanzierung der Investition benötigt. Damit stellt die positive Differenz zwischen dem Barwert der Einzahlungen und dem Barwert der Auszahlungen nichts anderes als einen Gewinn dar. Die Differenz zwischen BW_E und BW_A wird als Kapitalwert C_0 bezeichnet:

(25) $$C_0 = BW_E - BW_A$$

Es liegt nun die Frage nahe, mit welchem maximalen Zinssatz das Geld der Kapitalgeber für die Investition verzinst werden kann, ohne dass ein Verlust entsteht. Dann verzinst sich die Investition gerade so hoch, wie das Kapital der Kapitalgeber zu verzinsen ist. Dieser kritische Zinssatz wird als interne Rendite oder Effektivzinssatz r der Investition bezeichnet. Die interne Rendite ist der Zinssatz, mit dem die abgezinsten Einzahlungen gerade die abgezinsten Auszahlungen ergeben, also der Kalkulationszinssatz, bei dem BW_A und BW_E einander gleich sind. Somit gilt folgende Bestimmungsgleichung für die interne Rendite:

(26) $$\sum_{ta} \frac{A_{ta}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m \cdot ta}} = \sum_{te} \frac{E_{te}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m \cdot te}}$$

Wenn der Investor ein Kreditinstitut ist, sind seine Investitionen Kredite. Die interne Rendite der Investition, der Effektivzinssatz des Kredites, zeigt dann dem Kreditnehmer, mit welchem Zinssatz er dem Kreditgeber dessen Kapital vermehren muss, anders ausgedrückt, was der Kredit kostet. Der effektive Zins ist damit ein wichtiges Kriterium für die Auswahl unter mehreren Kreditangeboten.

Als es noch keine Vorschriften gab, wie der Effektivzins eines Kredites zu berechnen ist, konnte man etwa Folgendes von seiner Bank hören: „Der Kreditzins beträgt nur 1 % pro Monat auf die vereinbarte Kreditsumme, und Sie zahlen den Kredit in bequemen Monatsraten zurück.“ Solche – in mehrfacher Hinsicht – unseriösen Aussagen werden seit 1985 durch die Preisangabenverordnung (PAngV) verhindert. § 6 Abs. 1 PAngV bestimmt: „Bei Krediten sind als Preis die Gesamtkosten als jährlicher Vomhundertsatz des Kredits anzugeben und als ‚effektiver Jahreszins’ … zu bezeichnen.“ Für die Berechnung des effektiven Jahreszinses ist entsprechend dem Anhang zu § 6 PAngV folgende Formel anzuwenden, die in die hier verwendete Notation übersetzt ist:

(27) $$\sum_{ta} \frac{A_{ta}}{(1+r)^{ta}} = \sum_{te} \frac{E_{te}}{(1+r)^{te}}$$

Da in dieser Formel der Faktor $1+r$ und nicht $1+\frac{r}{m}$ verwendet wird, sieht man unmittelbar, dass $m = 1$ ist. Implizit werden von der Preisangabenverordnung also jährliche Zinseszinsen vorausgesetzt.

Bei unterjährigen Zahlungen führt dies nun allerdings zu den eingangs dargestellten Merkwürdigkeiten in der Zinsberechnung. Es sei beispielsweise ein Kredit von 100 betrachtet, der mit 10 % pro Jahr zu verzinsen ist. Wenn die Kreditlaufzeit genau ein Jahr beträgt und das Konto zwischenzeitlich nicht abgerechnet wird, ist der Kredit nach einem Jahr nebst Zinsen mit 110 zurückzuzahlen. Dass diese Kapitalvermehrung für den Kreditgeber 10 % beträgt und somit der Effektivzins gleich dem Nominalzins ist, bedarf keiner weiteren Überlegungen. Wenn nun aber die Kreditlaufzeit nur ein halbes Jahr beträgt, dann sind unter ansonsten gleichen Bedingungen $100 + 100 \cdot 0{,}05 = 105$ zurückzuzahlen. Dass 5 % für ein halbes Jahr gleichbedeutend ist mit 10 % für das ganze Jahr, dass also auch in diesem Fall der Nominalzins von 10 % gleich dem Effektivzins ist, leuchtet dem Kaufmann ebenfalls unmittelbar ein.

Indessen ergibt sich nach § 6 PAngV ein Effektivzins von 10,25 %, wie man durch Einsetzen der Daten des Beispiels in Gleichung (27) erkennt. Es gilt nämlich

(28) $$100 = \frac{105}{(1+r)^{0,5}}$$

Hieraus folgt $r = 0{,}1025 = 10{,}25$ %. Der Grund für dieses auf den ersten Blick merkwürdige Ergebnis liegt darin, dass der Zinsfaktor für jährliche Zinseszinsen $(1 + r)^t$ auf den unterjährigen Bereich angewendet wird.

Tatsächlich fallen im unterjährigen Bereich aber einfache Zinsen an, das heißt, Zinsen tragen keine Zinsen. Wächst ein Kapital nur mit einfacher Verzinsung, so würde ein Kapital K_0 auf K_t mit einem Zinssatz r sich in t Jahren folgendermaßen entwickeln:

(29) $$K_t = K_0 + K_0 \cdot r \cdot t$$

Hieraus folgt für r

(30) $$r = \frac{K_t - K_0}{K_0 \cdot t}$$

Mit den Daten des Beispiels ergibt sich

(31) $$r = \frac{105-100}{100 \cdot 0{,}5} = 0{,}1 = 10\%$$

In früheren Fassungen der Preisangabenverordnung war die einfache Verzinsung für den unterjährigen Bereich auch vorgeschrieben, und die exponentielle Verzinsung mit dem Faktor $(1 + r)^t$ galt nur für den ganzzahligen Bereich der Laufzeit. Jetzt bestimmt § 6 Abs. 2 Satz 3 PAngV ausdrücklich: „Es gilt die exponentielle Verzinsung auch im unterjährigen Bereich.“ Damit ist die Berechnung des Effektivzinssatzes mit einfacher Verzinsung entsprechend Gleichung (30) nicht zulässig. Der Kredit suchende Bankkunde muss diese kleine Merkwürdigkeit hinnehmen. Wenn er Kreditangebote vergleicht, ist es für ihn ohnehin wichtiger, dass alle Anbieter den Effektivzins nach den gleichen Regeln berechnen, damit die Effektivzinssätze miteinander vergleichbar sind.

Man könnte eine Forderung nach einfacher Verzinsung im unterjährigen Bereich auch nicht damit begründen, dass Zahlungen auf den Kredit unterjährig erfolgen. Wann Zinsen wieder Zinsen tragen, das hängt von den Kreditaufnahmemöglichkeiten und den Kapitalanlagemöglichkeiten desjenigen ab, der die gegebenen Zahlungen zeitlich zu transformieren wünscht.

Der Kreditnehmer kann die erhaltene Einzahlung in einen anderen Zeitpunkt transformieren, indem er eine Anlage tätigt. Die Gegebenheiten dieser Anlage, wann hier Zinsen und Zinseszinsen gezahlt werden, bestimmen seine Transformationsmöglichkeiten und damit die implizierten Voraussetzungen hinsichtlich der Zinseszinsen für die Ermittlung des Barwerts. Allerdings wird der Kreditnehmer wohl nur selten den erhaltenen Kredit zu einer Finanzinvestition benutzen, der Zinsen zugerechnet werden können. Bei Sachinvestitionen käme es darauf an, wann Kapitalvermehrungen ihrerseits zu neuen Kapitalvermehrungen führen. Da kann man guten Gewissens bei dem jährlichen Rhythmus der Geschäftsjahre bleiben.

Wenn der Kreditgeber die mit dem Kredit verbundenen Zahlungen zeitlich transformieren will, kann er dies für die Kreditauszahlung durch eigene Finanzierung und Refinanzierung tun und für die folgenden Rückflüsse aus Zinsen und Tilgung durch erneute eigene Anlagen. Die Zinsstruktur der eigenen Finanzierungs- und Kapitalanlagemöglichkeiten bestimmt die Abzinsung der Kreditzahlungen durch den Kreditgeber.

Die gegebene Zahlungsstruktur des Kredites impliziert hingegen in beiden Fällen keine Annahme über die Gestaltung der Zinseszinsen. Die Preisangabenverordnung enthält also mit der Vorgabe jährlicher Zinseszinsen eine Annahme über die anderweitigen Anlage- und Finanzierungsmöglichkeiten der Kreditnehmer und der Kreditgeber. Diese Vorgabe definiert einen durchschnittlichen, für jeden Markteilnehmer gültigen Zustand, und sie ist so in jedem Fall eine Voraussetzung für die Vergleichbarkeit verschiedener Kreditangebote.

Im Interesse der Vergleichbarkeit werden im Übrigen von der Preisangabenverordnung noch weitere Aussagen über die, wenn man so will, durchschnittliche Wirklichkeit gemacht. So werden die Schaltjahre nicht beachtet und alle Monate als gleich lang betrachtet (vgl. Nr. 4 Anlage zu § 6 PAngV).

Aus der Bestimmungsgleichung für den Effektivzinssatz lässt sich weiterhin ein Prinzip zur Bewertung von Forderungen und Verbindlichkeiten ableiten. Der Effektivzins ist derjenige Zinssatz, mit dem die abgezinsten Einzahlungen aus einer Forderung oder einer Verbindlichkeit gleich den abgezinsten Auszahlungen sind. Die Auszahlungen des Kreditgebers sind die Einzahlungen des Kreditnehmers und umgekehrt. Betrachtet man diese ökonomische Selbstverständlichkeit unter dem Gesichtspunkt der Transformation von Zahlungen, dann sind die mit dem Effektivzins abgezinsten zukünftigen Einzahlungen des Kreditgebers gleich dem Wert seiner Auszahlung in Höhe der Kreditsumme, dem Wert des Kredites zu Beginn der Laufzeit. Denselben Wert ergeben die mit dem Effektivzins abgezinsten zukünftigen Auszahlungen des Kreditnehmers für Tilgung und Zinsen. Sie stellen für ihn den Wert seiner Kreditverbindlichkeit dar, zu Beginn die Kreditsumme.

Damit kann der Wert eines Kredites grundsätzlich als Barwert der mit dem Effektivzins abgezinsten zukünftigen Einzahlungen für den Kreditgeber und als Barwert der mit dem Effektivzins abgezinsten zukünftigen Auszahlungen des Kreditnehmers dargestellt werden. Beide Barwerte sind logischerweise einander gleich und verkörpern so die Gleichwertigkeit von Leistung und Gegenleistung.

Dieser Gedanke, heutige Werte aus zukünftigen Zahlungen zu bestimmen, hat Eingang in die internationalen Rechungslegungsvorschriften gefunden. So bestimmen die IFRS in IAS 39.9: „Die Effektivzinsmethode ist eine Methode zur Berechnung der fortgeführten Anschaffungskosten eines finanziellen Vermögenswertes oder einer finanziellen Verbindlichkeit … und der Allokation von Zinserträgen und Zinsaufwendungen auf die jeweiligen Perioden. Der Effektivzinssatz ist derjenige Kalkulationszinssatz, mit dem die geschätzten künftigen Ein- und Auszahlungen über die erwartete Laufzeit des Finanzinstruments ... exakt auf den Nettobuchwert des finanziellen Vermögenswertes oder der finanziellen Verbindlichkeit abgezinst werden.“

Allerdings ist nicht ersichtlich, welche Annahmen bei der Abzinsung hinsichtlich der Zinseszinsperiode zu machen sind. Während die Preisangabenverordnung jährliche Zinseszinsen vorschreibt, bleibt dies in den IFRS offen. Möglicherweise ist den Schöpfern der IFRS der Gedanke jährlicher Zinseszinsen selbstverständlich gewesen; eine Klarstellung wäre hier aber wünschenswert. Solange diese nicht erfolgt ist, kann die Bewertung zukünftiger Zahlungen nach der Preisangabenverordnung zu anderen Ergebnissen führen als nach den internationalen Rechnungslegungsvorschriften.