Grenzkosten

1. Was sind Grenzkosten?

Was Grenzkosten sind, sollte man aus der bloßen Bezeichnung ableiten können: Eine Grenze wird überschritten, und die Kosten ändern sich. Kosten verändern sich, weil sich eine Größe ändert, die Einfluss auf die Kosten hat, eine Kosteneinflussgröße.

Von allen Kosteneinflussgrößen wird gewöhnlich nur eine betrachtet, nämlich die Menge der Produkte, denen die Kosten zuzurechnen sind, sei die Produktmenge eine Produktionsmenge, eine Absatzmenge oder beides zugleich. Wenn sich die Produktmenge ändert, dann ändern sich auch die hiervon abhängigen Kosten.

Es erscheint sinnvoll, die Grenzkosten zu definieren als Kostenänderung, die durch die Mengenänderung verursacht wird. Sei K(x) eine Kostenfunktion in Abhängigkeit von der Produktmenge x und werden Differenzen als Δ bezeichnet, dann ist die grundlegende Definition der Grenzkosten

$$\text{Grenzkosten} = \Delta K(\Delta x) \tag{1}$$

Die zu einer bestimmten Produktmenge gehörenden Kosten ergeben sich, indem diese Menge in die Kostenfunktion eingesetzt wird. Für die Grenzkosten interessieren zwei Mengen, die Menge x vor der Mengenänderung und $x + \Delta x$ nach der Mengenänderung. Die Kosten vor der Mengenänderung sind K(x), die Kosten nach der Mengenänderung $K(x + \Delta x)$. Die Differenz der Kosten bei diesen beiden Mengen ergibt die Grenzkosten:

$$\Delta K(\Delta x) = K(x + \Delta x) - K(x) \tag{2}$$

Mithilfe dieser Definition können die üblicherweise verwendeten Begriffsfassungen der Grenzkosten überprüft und geordnet werden. Am häufigsten findet man die Grenzkosten definiert als Kostenveränderung bei Veränderung der Produktmenge um eine Einheit, als variable Stückkosten und als erste Ableitung der Kostenfunktion:

$$\text{Grenzkosten} = \Delta K(\Delta x = 1) \tag{3}$$

Dieser Fall ist als Spezialfall in der allgemeinen Definition der Grenzkosten nach Gleichung (1) enthalten. Δx muss nur gleich 1 gesetzt werden, aus welchen Gründen auch immer.

Die variablen Stückkosten k_v ergeben sich aus den variablen Gesamtkosten K_v, indem durch die Menge x geteilt wird:

$$k_v = \frac{K_v}{x} \tag{4}$$

$$K_v = k_v \cdot x \tag{5}$$

Dabei stellt K_v denjenigen Teil der Gesamtkosten K dar, der sich mit der Produktmenge verändert. Zusammen mit den fixen Kosten K_f, die sich nicht mit der Menge verändern, ergeben sich die gesamten Kosten. Es gilt

$$K(x) = K_f + K_v(x) \tag{6}$$

Es versteht sich, dass Veränderungen der Kosten K bei Konstanz von K_f nur durch Veränderungen der variablen Kosten K_v bewirkt werden können. Die aus K_v abgeleiteten variablen Stückkosten sind ebenfalls als Grenzkosten bekannt:

$$\text{Grenzkosten} = k_v \tag{7}$$

Wenn die Kostenfunktion K(x) differenzierbar ist, kann die erste Ableitung gebildet werden. Die erste Ableitung einer Funktion ist selbst eine Funktion, welche die Steigung einer Tangente an jedem Punkt der abgeleiteten Funktion angibt. Die erste Ableitung der Kostenfunktion K(x) wird oft als Grenzkosten bezeichnet:

(8) $$\text{Grenzkosten} = \frac{dK}{dx} = K'$$

Für die Untersuchung dieser Definitionen ist es erforderlich, die betrachteten Kostenfunktionen danach zu unterschieden, ob sie linear oder nicht linear sind.

2. Lineare und nicht-lineare Kostenfunktionen

Eine lineare Kostenfunktion ist dadurch gekennzeichnet, dass k_v eine Konstante ist. Unter dieser Voraussetzung ergibt die zeichnerische Darstellung der Kostenfunktion

(9) $$K(x) = k_v \cdot x + K_f$$

eine Gerade, was die Bezeichnung als lineare Funktion erklärt:

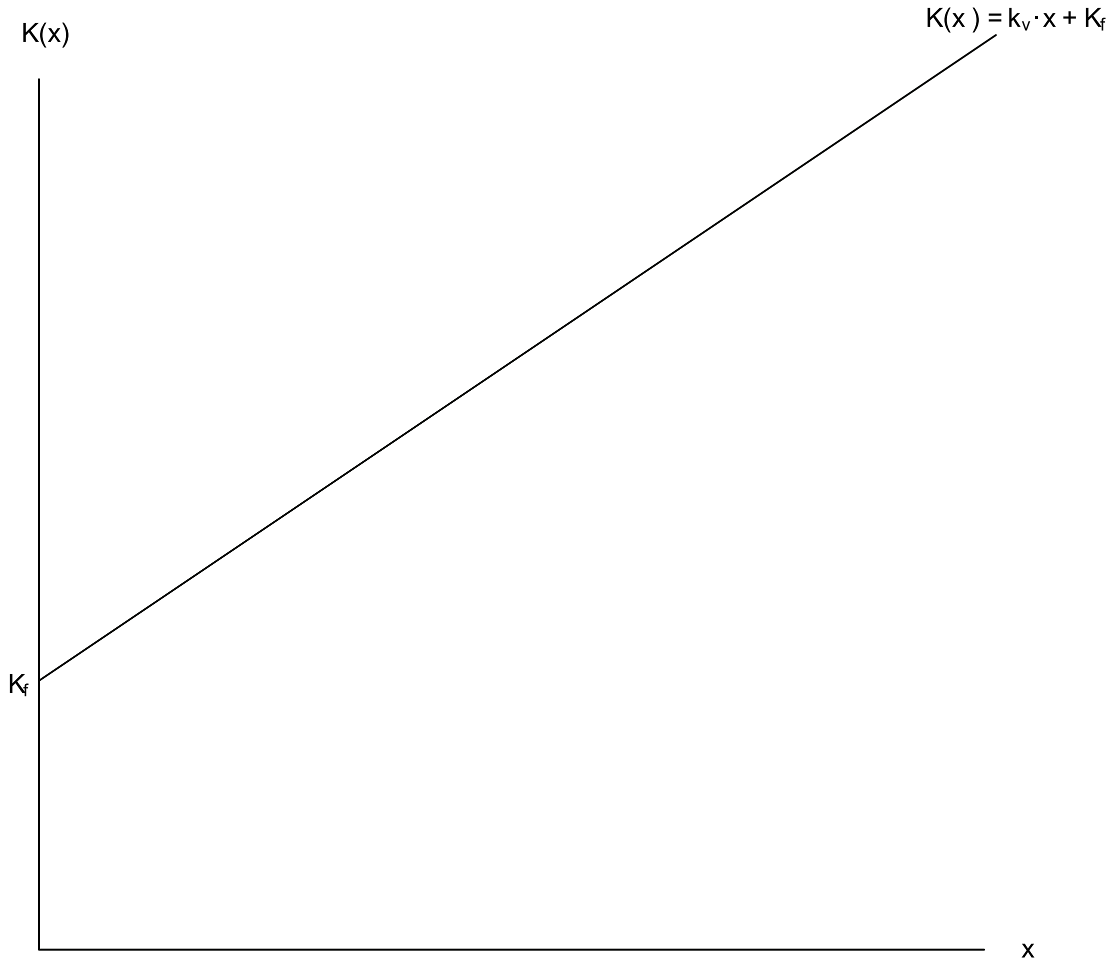

Abbildung 1: Lineare Kostenfunktion

Für nicht-lineare Kostenfunktionen gilt dagegen, dass k_v nicht konstant ist, sondern eine Funktion von x darstellt. Eine nicht-lineare Kostenfunktion wird also definiert durch

(10) $$K(x) = k_v(x) \cdot x + K_f$$

wobei $k_v \neq$ const. Als Beispiel einer nicht-linearen Kostenfunktion sei die progressive Kostenfunktion betrachtet:

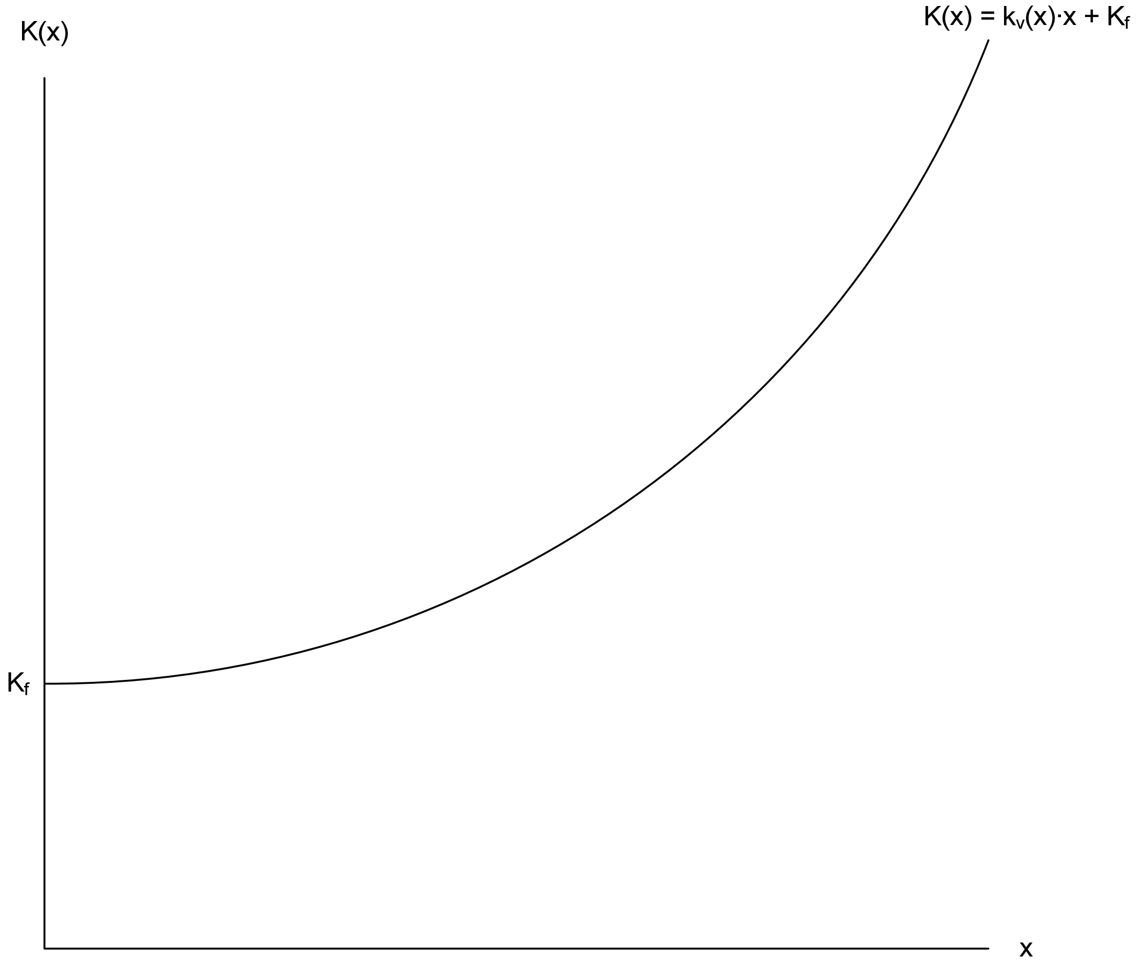

Abbildung 2: Nicht-lineare Kostenfunktion

3. Grenzkosten bei linearen Kostenfunktionen

3.1. Variable Stückkosten als Grenzkosten bei linearen Kostenfunktionen

Bei einer linearen Kostenfunktion ändern sich die variablen Stückkosten nicht, wenn die Menge verändert wird. In der Ausgangslage betragen die Kosten also

$$K(x) = k_v \cdot x + K_f$$

und nach der Mengenänderung

$$K(x + \Delta x) = k_v \cdot (x + \Delta x) + K_f$$

Die Grenzkosten gemäß der grundlegenden Definition von Gleichung (2) sind die Differenz der beiden Beträge:

$$\begin{aligned} & K(x + \Delta x) - K(x) \\ & = k_v \cdot (x + \Delta x) + K_f - (k_v \cdot x + K_f) \\ & = k_v \cdot x + k_v \cdot \Delta x - k_v \cdot x \\ & = k_v \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Somit gilt für die Grenzkosten bei einer linearen Kostenfunktion

(11) $$\Delta K(\Delta x) = k_v \cdot \Delta x$$

Setzt man $\Delta x = 1$, dann erhält man die Kostenänderung bei Veränderung der Produktmenge um eine Einheit:

(12) $$\Delta K(\Delta x = 1) = k_v$$

Für lineare Kostenfunktionen und bei Veränderung der Produktmenge um eine Einheit werden die Grenzkosten also durch die variablen Stückkosten gegeben.

3.2. Die erste Ableitung der Kostenfunktion als Grenzkosten bei linearen Kostenfunktionen

Als erste Ableitung der linearen Kostenfunktion

$$K(x) = k_v \cdot x + K_f$$

ergibt sich ohne Weiteres

(13) $$K'(x) = k_v$$

Die erste Ableitung einer linearen Kostenfunktion, ihre konstante Steigung, stellt also nichts anderes dar als die variablen Stückkosten.

Nach Gleichung (12) sind die variablen Stückkosten einer linearen Kostenfunktion aber auch die Grenzkosten $\Delta K(\Delta x = 1)$. Gleichung (12) in Gleichung (13) eingesetzt:

(14) $$\Delta K(\Delta x = 1) = k_v = K'$$

Die Grenzkosten als Veränderung der Kosten bei Veränderung der Produktmenge um eine Einheit sind also bei einer linearen Kostenfunktion in der Tat die variablen Stückkosten und ebenso die erste Ableitung der Kostenfunktion. Diese Grenzkosten sind bei einer linearen Kostenfunktion konstant.

Die Grenzkosten $\Delta K(\Delta x)$ für die Veränderung der Produktmenge um die beliebige Menge Δx ergeben sich, indem die konstanten Grenzkosten pro Stück mit Δx multipliziert werden. Die Multiplikation von Gleichung (14) mit Δx ergibt:

(15) $$\Delta K(\Delta x) = k_v \cdot \Delta x = K' \cdot \Delta x$$

Mit der Kenntnis einer dieser Größen ist die Frage beantwortet, welche Änderung der Kosten eine vorgegebene Veränderung der Produktmenge nach sich zieht – jedoch immer unter der Voraussetzung, dass die zugrunde liegende Kostenfunktion linear ist.

4. Grenzkosten bei nicht-linearen Kostenfunktionen

4.1. Variable Stückkosten als Grenzkosten bei nicht-linearen Kostenfunktionen

Eine nicht-lineare Kostenfunktion ist dadurch gekennzeichnet, dass sich die variablen Stückkosten mit der Produktmenge ändern. Seien $k_{v,0}$ die variablen Stückkosten in der Ausgangslage und $k_{v,1}$ die variablen Stückkosten nach der Mengenänderung, dann sind die Grenzkosten gemäß Gleichung (2):

(16) $$\Delta K(\Delta x) = k_{v,1} \cdot (x + \Delta x) - k_{v,0} \cdot x$$

Diese Gleichung lässt sich wegen der Verschiedenheit der variablen Stückkosten nicht weiter vereinfachen. Insbesondere ergibt sich aus der Gleichung, dass die Grenzkosten nicht einfach ermittelt werden können, indem die variablen Stückkosten der Ausgangslage mit der Mengenerhöhung multipliziert werden. Vielmehr gilt

(17) $$\Delta K(\Delta x) \neq k_{v,0} \cdot \Delta x$$

Auch für $\Delta x = 1$ ergibt sich keine weitere Vereinfachung; es gilt

(18) $$\Delta K(\Delta x = 1) \neq k_{v,0}$$

Im Fall nicht-linearer Kostenfunktionen sind die Grenzkosten und die variablen Stückkosten der Ausgangslage also *nicht* identisch.

Ebenso folgt aus Gleichung (16), dass sich die Grenzkosten nicht allein aus den neuen variablen Stückkosten nach der Mengenänderung bestimmen lassen. Vielmehr gilt

(19) $$\Delta K(\Delta x) \neq k_{v,1} \cdot \Delta x$$

sowie

(20) $$\Delta K(\Delta x = 1) \neq k_{v,1}$$

Grafisch lassen sich diese Zusammenhänge folgendermaßen veranschaulichen:

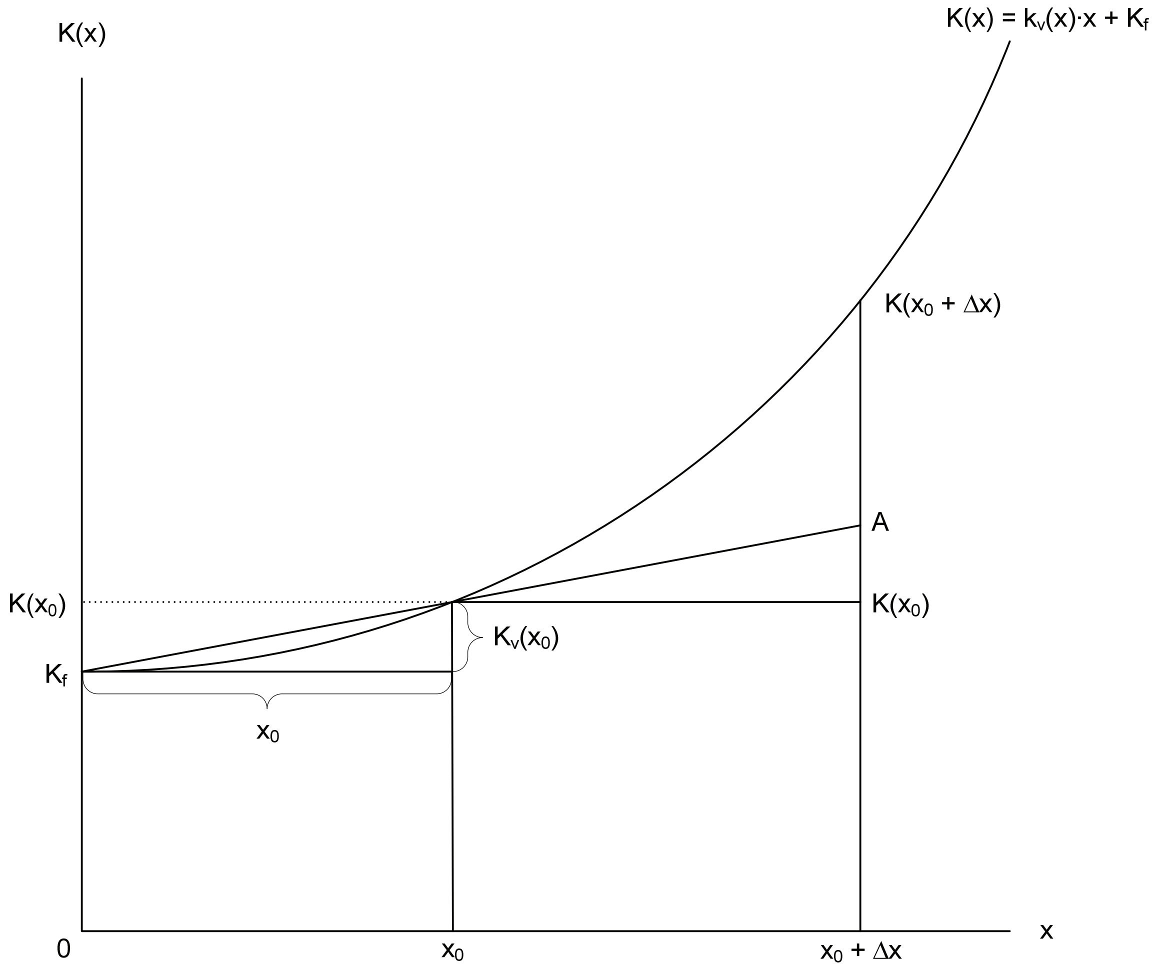

Abbildung 3: Variable Stückkosten der Ausgangslage als Grenzkosten

Die Menge der Ausgangslage wird in der Grafik mit x_0 bezeichnet, um diesen Wert von der Variablen x zu unterscheiden.

Grenzkosten

Die variablen Stückkosten der Ausgangslage lassen sich in der Zeichnung darstellen, und zwar als Steigung der Strecke zwischen den Punkten [0, K_f] und [x_0, $K(x_0)$]. Der Punkt [x_0, $K(x_0)$] liegt nämlich um $K(x_0) - K_f = K_v(x_0)$ höher als der Punkt [0, K_f]. Die Steigung ist somit

$$\frac{K_v(x_0)}{x_0}$$

Hierin Gleichung (5) eingesetzt:

$$\frac{k_{v,0} \cdot x_0}{x_0} = k_{v,0}$$

Die Steigung stellt also nichts anderes dar als die variablen Stückkosten der Ausgangslage. Glaubt man nun, dass diese wie bei einer linearen Kostenfunktion konstant bleiben und multipliziert $k_{v,0}$ mit Δx, dann wäre in der Grafik die Strecke $\overline{[0, K_f][x_0, K(x_0)]}$ bis zur Menge $x_0 + \Delta x$ zu verlängern. Diese Verlängerung erreicht hier die Kostenhöhe A. Die auf diese Weise bestimmten Grenzkosten sind also $A - K(x_0)$. Tatsächlich sind die Kosten nach der Erhöhung der Menge aber $K(x_0 + \Delta x)$, und die richtigen Grenzkosten sind $K(x_0 + \Delta x) - K(x_0)$. Es ist also falsch, die Grenzkosten pro Stück bei einer nicht-linearen Kostenfunktion mit den variablen Stückkosten der Ausgangslage gleichzusetzen und diese für konstant zu halten.

Es hilft auch nicht weiter, wenn man den Grenzkosten die neuen variablen Stückkosten $k_{v,1}$ zugrunde legt. Diese ergeben sich in der folgenden Zeichnung als Steigung der Strecke

$$\overline{[0, K_f][x_0 + \Delta x, K(x_0 + \Delta x)]}$$

Grenzkosten

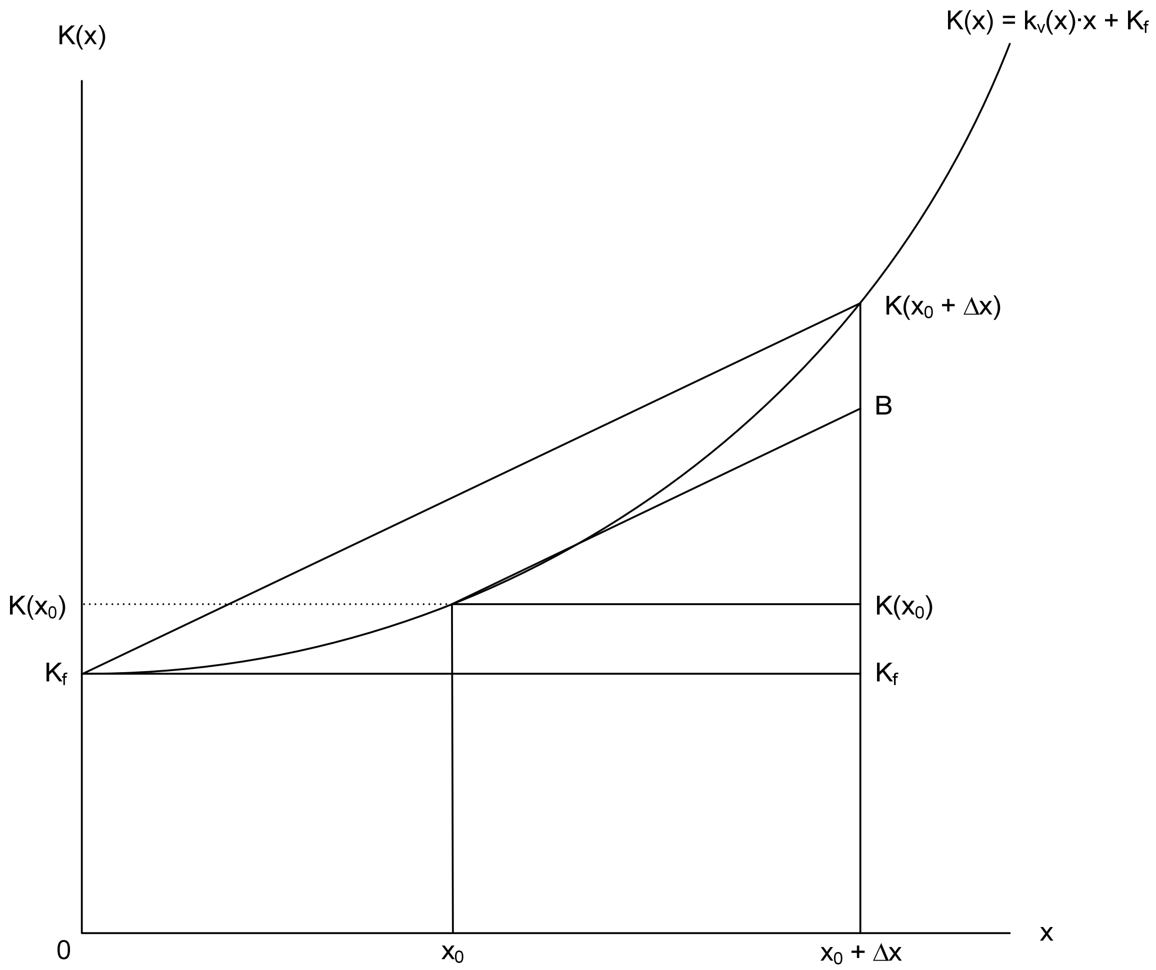

Abbildung 4: Die neuen variablen Stückkosten als Grenzkosten

Die Steigung ist nämlich:

(21) $$\frac{K(x_0 + \Delta x) - K_f}{x_0 + \Delta x}$$

Bei der Menge $x_0 + \Delta x$ sind die variablen Stückkosten definitionsgemäß $k_{v,1}$. Die Gesamtkosten bei dieser Menge sind also

(22) $$K(x_0 + \Delta x) = K_f + k_{v,1} \cdot (x_0 + \Delta x)$$

Dies in (21) für die Steigung eingesetzt:

(23) $$\frac{K(x_0 + \Delta x) - K_f}{x_0 + \Delta x} = \frac{K_f + k_{v,1} \cdot (x_0 + \Delta x) - K_f}{x_0 + \Delta x} = k_{v,1}$$

Um die Kostensteigerung mit $k_{v,1}$, ausgehend von $x = 0$ und $K(x) = K(x_0)$ grafisch zu bestimmen, muss eine Parallele zur Strecke $\overline{[0, K_f][x_0 + \Delta x, K(x_0 + \Delta x)]}$ gezeichnet werden, die im Punkt $[x_0, K(x_0)]$ beginnt.

Entwickeln sich die Kosten entsprechend mit der Steigung $k_{v,1}$, erreichen sie bei der Menge $x_0 + \Delta x$ die Höhe B in Abbildung 4. Auch dies sind, bei aller Mühe, nicht die richtigen Kosten nach der Mengenänderung. Diese bleiben unverändert bei $K(x_0 + \Delta x)$; die richtigen Grenzkosten sind $K(x_0 + \Delta x) - K(x_0)$ und nicht $B - K(x_0)$.

Es hilft nichts, wenn man bei einer nicht-linearen Kostenfunktion die Grenzkosten aus den variablen Stückkosten ermitteln will, muss man beide verwenden, die alten und die neuen, wie dies von Gleichung (16) vorgegeben wird. Der erste Term von Gleichung (16) stellt die neuen variablen Kosten nach der Mengenänderung dar, wie sich schon aus der Umstellung von Gleichung (23) ergibt:

(24) $$k_{v,1} \cdot (x_0 + \Delta x) = K(x_0 + \Delta x) - K_f = K_v(x_0 + \Delta x)$$

Zieht man hiervon die bisherigen variablen Kosten $K_v(x_0) = k_{v,0} \cdot x_0$ ab, erhält man die Grenzkosten:

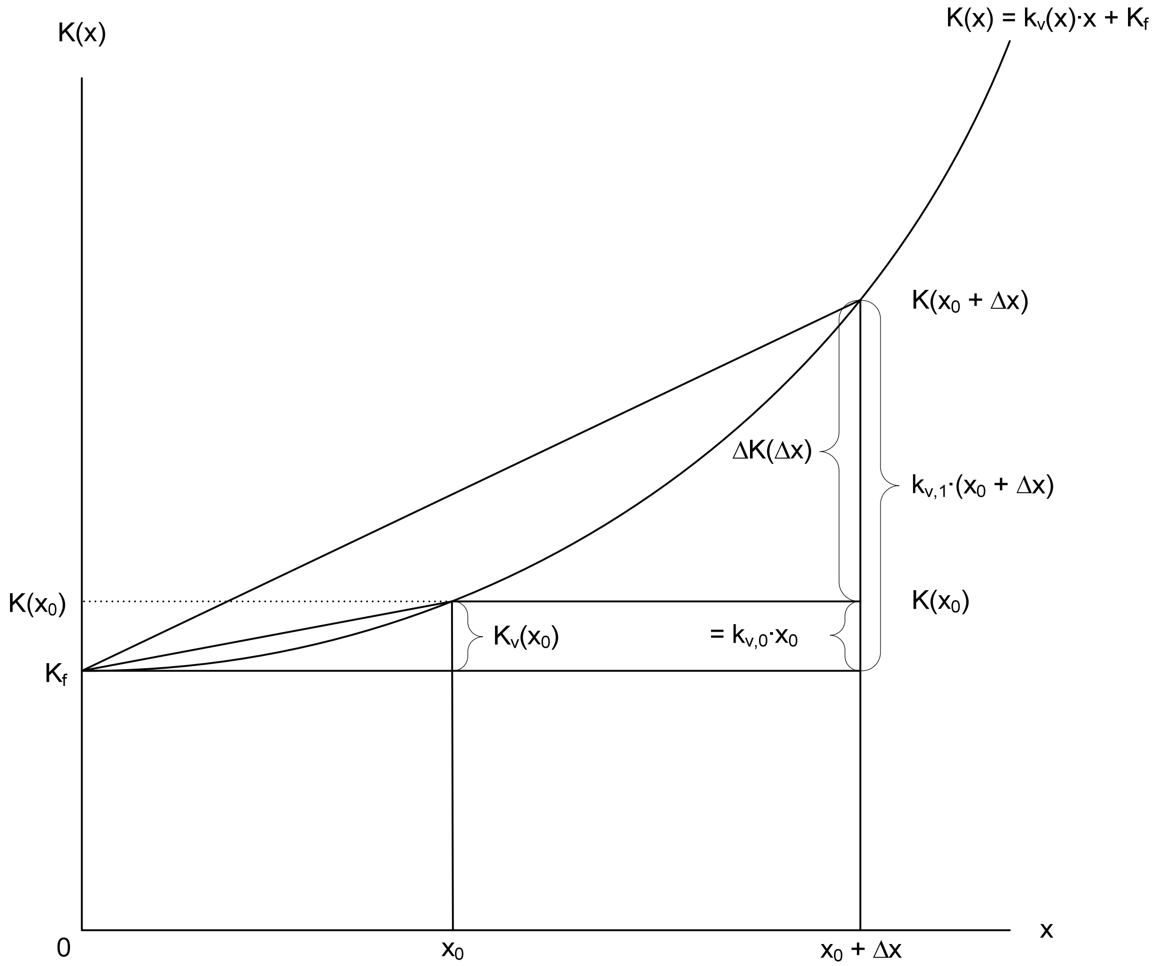

Abbildung 5: Grafische Ermittlung der Grenzkosten aus den variablen Stückkosten

Die Grenzkosten lassen sich also auch bei einer nicht-linearen Kostenfunktion aus den variablen Stückkosten vor der Mengenänderung und nach der Mengenänderung ermitteln, aber warum sollte man das tun? Hierzu müssen die variablen Kosten nach der Mengenänderung bekannt sein; und diese kennt man logischerweise erst, wenn man sie ermittelt hat. Man setze einfach die neue Menge in die Kostenfunktion ein und ziehe die Differenz zu den bisherigen Kosten. Dann hat man schon die Grenzkosten, und es ist ganz unnötig, danach noch die variablen Stückkosten zu ermitteln und hieraus die Grenzkosten zu berechnen. Der Weg über die variablen Stückkosten ist nur bei einer linearen Kostenfunktion einfach, bei einer nicht-linearen Kostenfunktion ist es ein Umweg.

4.2. Die erste Ableitung der Kostenfunktion als Grenzkosten bei nicht-linearen Kostenfunktionen

Eine nicht-lineare Kostenfunktion ist dadurch gekennzeichnet, dass k_v eine Funktion von x ist. Die Ableitung der nicht-linearen Kostenfunktion gemäß Gleichung (10) ergibt

(25) $$K'(x) = k_v(x) + k_v'(x) \cdot x$$

Diese erste Ableitung ist nicht, wie bei einer linearen Kostenfunktion, mit k_v identisch. Dies wäre nur für $k_v'(x) = 0$ der Fall. Wenn nun $k_v'(x) = 0$ für alle x gilt, ist k_v eine Konstante. Die variablen Stückkosten sind aber bei einer nicht-linearen Kostenfunktion gerade nicht konstant.

Für eine nicht-lineare Kostenfunktion mit $k_v'(x) \neq 0$ sind also die variablen Stückkosten nicht gleich der ersten Ableitung der Kostenfunktion, und die variablen Stückkosten sind nicht gleich den Grenzkosten. Ergibt nun auch die erste Ableitung einer nicht-linearen Kostenfunktion *nicht* die richtigen Grenzkosten? Es ist zu fragen, ob auch das zweite Ungleichheitszeichen in den folgenden Ungleichungen gilt:

(26) $$\Delta K(\Delta x = 1) \neq k_v \neq K'$$

(27) $$\Delta K(\Delta x) \neq k_v \cdot \Delta x \neq K' \cdot \Delta x$$

Diese Frage lässt sich beantworten, wenn man den Ansatz der Differenzialrechnung auf die Funktion K(x) anwendet. Hierzu wird zunächst in der folgenden Grafik der Differenzenquotient bestimmt.

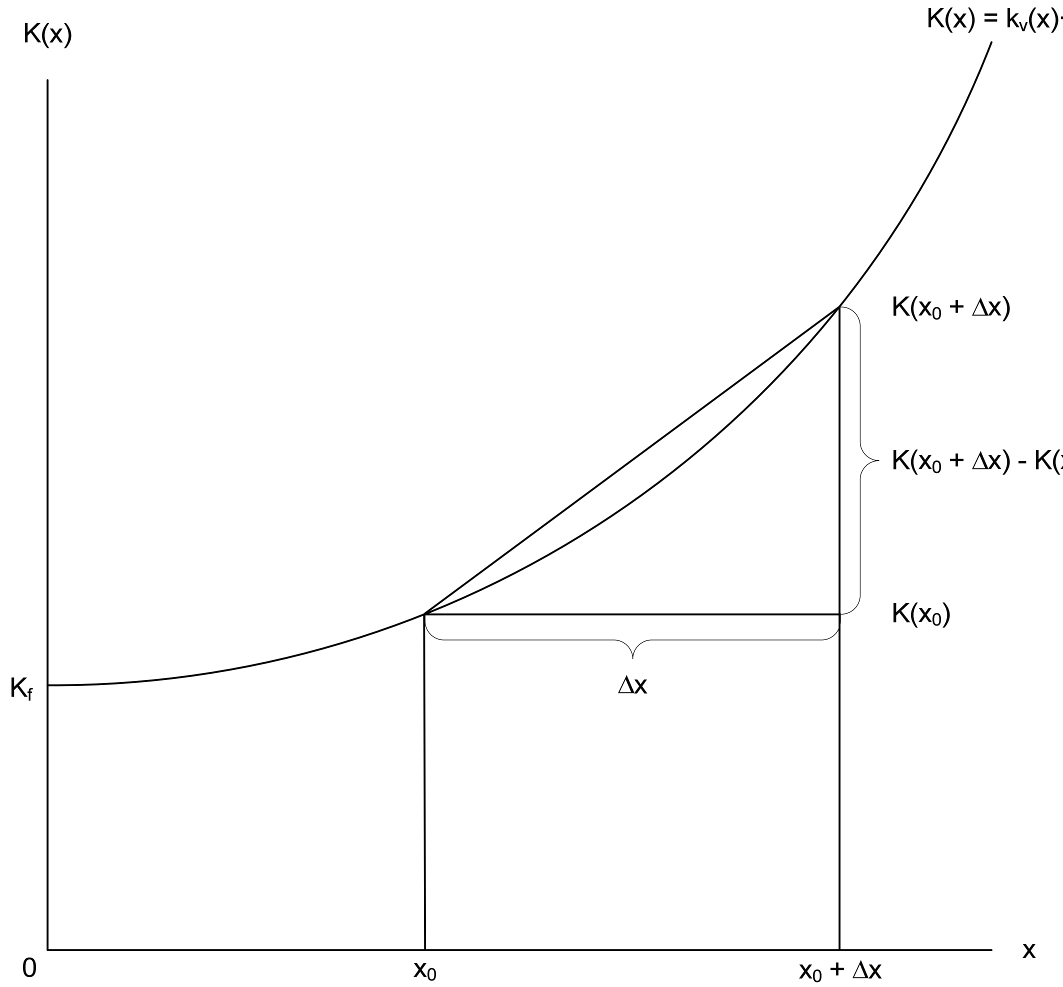

Abbildung 6: Differenzenquotient der Grenzkosten

Die Steigung der Sekante zwischen den Punkten $[x_0, K(x_0)]$ und $[x_0 + \Delta x, K(x_0 + \Delta x)]$ ist der Differenzenquotient:

(28) $$\text{Differenzenquotient} = \frac{K(x_0 + \Delta x) - K(x_0)}{\Delta x}$$

Im Zähler des Differenzenquotienten stehen genau die Grenzkosten gemäß Gleichung (2).

Für $\Delta x = 1$ wird der Differenzenquotient zu den Grenzkosten für die Veränderung der Produktmenge um eine Einheit:

(29) $$\text{Differenzenquotient}(\Delta x = 1) = K(x_0 + 1) - K(x_0) = \Delta K(\Delta x = 1) = \text{Grenzkosten}(\Delta x = 1)$$

In der Differenzialrechnung lässt man aber Δx gegen null gehen, wodurch der Differenzenquotient zum Differenzialquotienten wird:

(30) $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{dK}{dx} = K'$$

Von hier rührt die Gleichsetzung der Grenzkosten mit der ersten Ableitung der Kostenfunktion, die ja für lineare Kostenfunktionen auch richtig ist.

Grafisch wird durch den Grenzübergang die Sekante zu einer Tangente im Punkt x_0, deren Steigung die erste Ableitung der abgeleiteten Funktion in diesem Punkt ist:

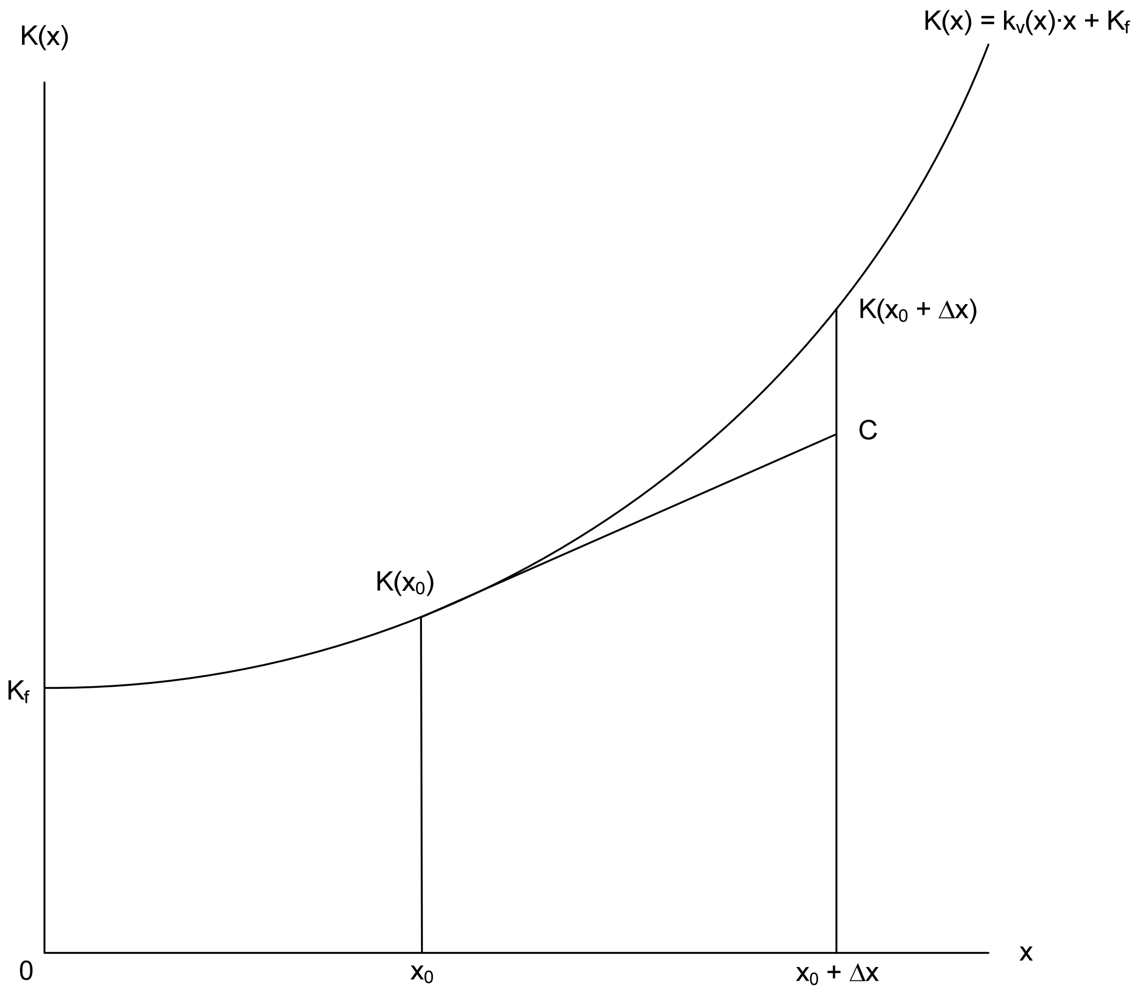

Abbildung 7: Differenzialquotient und Grenzkosten

Grenzkosten

Der Differenzenquotient für $\Delta x = 1$ und der Differenzialquotient für $\Delta x \to 0$ stimmen hier nicht überein, denn für jedes $\Delta x > 0$ wird die Tangente wieder zur Sekante, und die Steigung ändert sich.

Der Grenzübergang führt nun eben zu einer Veränderung der Menge von null, und eine Änderung der Produktmenge um null ist *keine* Veränderung der Produktmenge. Die Steigung der Tangente gilt nur für einen Punkt der Kostenkurve, nicht für ein Intervall.

Betrachtet man trotzdem die erste Ableitung der Kostenfunktion bei x_0 als Grenzkosten pro Stück, würden mit einer wieder positiven Mengenänderung von Δx Einheiten die Kosten bei der Menge $x_0 + \Delta x$ hiernach die Höhe C erreichen. Dieser Wert stimmt aber nicht mit dem von der Kostenfunktion gegebenem Wert $K(x_0 + \Delta x)$ überein – die Grenzkosten wären wieder falsch ermittelt.

Es bestätigt sich also, dass die Grenzkosten für die Veränderung der Menge um eine Einheit nicht mit der ersten Ableitung der Kostenfunktion übereinstimmen. Die Ungleichungen (26) und (27) bestehen zu Recht.

Auch wenn es nun falsch ist, bei einer nicht-linearen Kostenfunktion die Grenzkosten $\Delta K(\Delta x = 1)$ mit der ersten Ableitung K' gleichzusetzen, ist es dennoch nützlich, sich mit dem Differenzieren von Kostenfunktionen zu beschäftigen. Da kann man es auch akzeptieren, dass die erste Ableitung einer Kostenfunktion ebenfalls als Grenzkosten bezeichnet wird. Man muss sich nur dessen bewusst sein, dass die erste Ableitung einer nicht-linearen Kostenfunktion nicht die Veränderung der Kosten durch eine Veränderung der Produktmenge um eine Einheit ist.

Den Nutzen der Differenzialrechnung für die Kostenrechnung erkennt man, wenn man noch einmal Gleichung (25) betrachtet. Hiernach gilt nur dann $K'(x) = k_v(x)$, wenn $k_v'(x) = 0$ ist. Da $k_v(x)$ aufgrund der Nicht-Linearität der Kostenfunktion verschiedene Werte annehmen kann, nimmt auch $k_v'(x)$ verschiedene Werte an. Es ist damit zwar ausgeschlossen, dass $k_v'(x)$ für *alle* Werte von x gleich null ist (dann wäre die Kostenfunktion linear), aber dennoch kann unter den verschiedenen Werten, die $k_v'(x)$ annimmt, auch die Null sein.

Die Differenzialrechnung lehrt uns, dass an der Stelle, wo die erste Ableitung einer Funktion gleich null ist, eine Nullstelle liegt und die Funktion hier einen Extremwert aufweist. Der Extremwert kann ein Maximum, ein Minimum oder ein Sattelpunkt sein, was man durch die Untersuchung der weiteren Ableitungen herausfindet.

Den Kostenrechner interessieren natürlich nur die Minima von Kosten. Hier muss er aber leider feststellen, dass die Kostenfunktionen K(x) mit Ausnahme der äußerst selten vorkommenden rezessiven Kosten stets eine positive Steigung haben und die Kosten mit zunehmender Menge x ansteigen. Minimale Kosten hätte man zwar dann, wenn die Menge x gleich null gesetzt wird, aber dieser Fall ist trivial.

Minima von Kosten kann es nur bei den Stückkosten geben, aber beileibe nicht bei allen. So sind bei der linearen Kostenfunktion die variablen Stückkosten k_v konstant, und die gesamten Stückkosten, definiert als

(31) $$k = \frac{K(x)}{x}$$

nähern sich mit wachsendem x asymptotisch an k_v an, haben aber kein Minimum.

Bei den nicht-linearen Kostenfunktionen lassen sich als Grundtypen die Kostenfunktionen K(x) mit abnehmender Steigung (degressiver Kostenverlauf), mit zunehmender Steigung (progressiver Kostenverlauf) und einer Mischung aus beiden (ertragsgesetzlicher Kostenverlauf) unterscheiden. Für die hier interessierenden variablen Stückkosten gilt bei einer degressiven Kostenfunktion, dass aufgrund der geringer werdenden Zuwächse der variablen Kosten die variablen Stückkosten ständig sinken, aber kein Minimum erreichen. Bei einer progressiven Kostenfunktion mit ständig zunehmenden Kostenzuwächsen stiegen auch die variablen Stückkosten ständig an, sodass diese kein Minimum aufweisen. Bei einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion werden die Zuwächse der Kosten zunächst geringer (degressiver Teil) und nehmen nach dem Wendepunkt der Funktion zu (progressiver Teil). Das führt bei den Stückkosten dazu, dass diese zunächst abnehmen (negative Steigung der Stückkostenfunktion) und dann zunehmen (positive Steigung der Stückkostenfunktion). In dem Punkt, wo die negative Steigung in die positive Steigung übergeht, ist sie gleich null, und hier liegt das Minimum der Stückkosten. Das heißt, bei einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion verlaufen die Stückkosten in der Tat u-förmig (sie nehmen erst ab und dann zu), und bei k' = 0 liegt das Minimum der gesamten Stückkosten, bei $k_v' = 0$ liegt das Minimum der variablen Stückkosten.

Dies lässt sich am Beispiel der variablen Stückkosten einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion folgendermaßen darstellen:

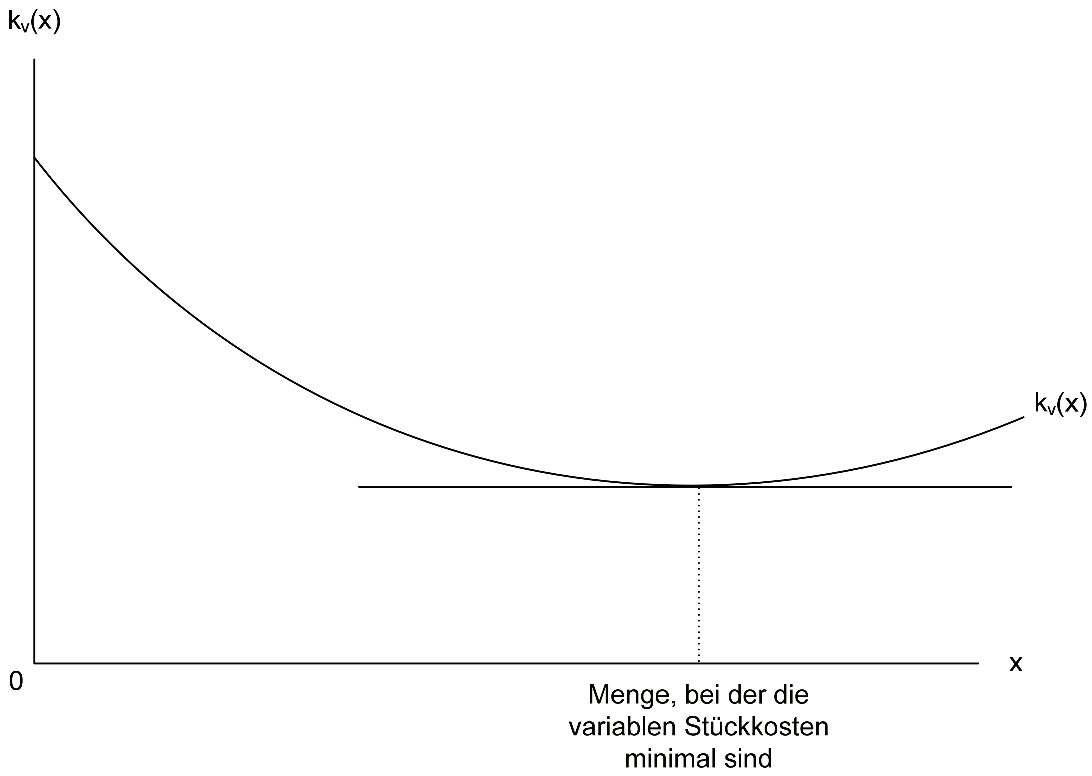

Abbildung 8: Das Minimum der variablen Stückkosten in der Stückkostenfunktion

In der Abbildung verläuft die Tangente an die Stückkostenfunktion horizontal. Ihre Steigung ist null. Der Tangentialpunkt markiert also die Menge, bei welcher die negative Steigung der variablen Stückkosten in eine positive übergeht. Hier liegt das Minimum der variablen Stückkosten.

Die Steigung der Tangente an die Funktion ist die erste Ableitung der Funktion. Dort, wo die erste Ableitung gleich null ist, verläuft die Tangente horizontal, ihre Steigung ist null. Die Bedingung für das Erreichen des Minimums der Funktion $k_v(x)$ ist also $k_v'(x) = 0$. Diese Bedingung ist im Tangentialpunkt erfüllt.

Setzt man die Bedingung $k_v'(x) = 0$ in Gleichung (25) ein, erhält man eine weitere Bedingung für das Minimum der variablen Stückkosten:

(32) $$K'(x) = k_v(x)$$

Diese Bedingung in der Funktion der Gesamtkosten K(x) dargestellt:

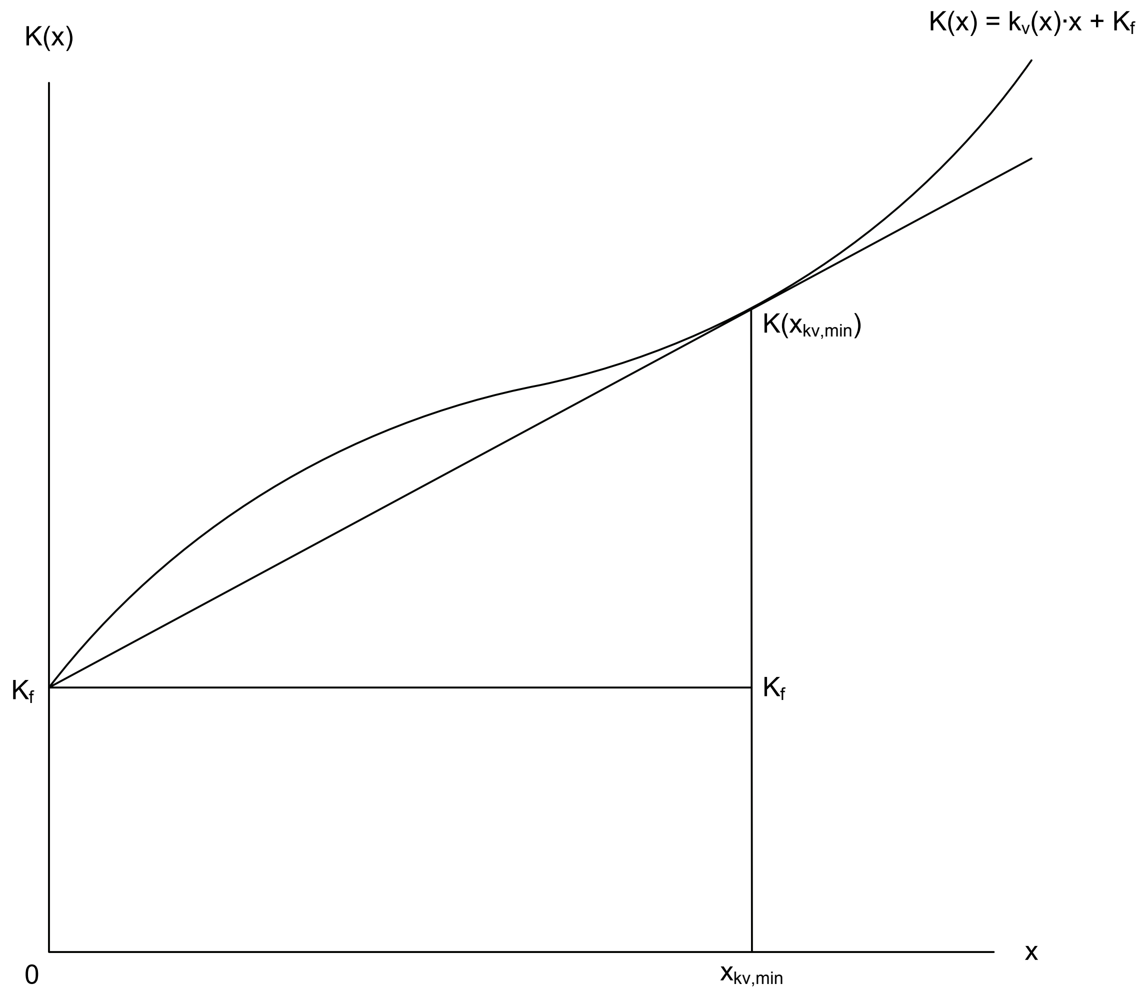

Abbildung 9: Das Minimum der variablen Stückkosten in der Gesamtkostenfunktion

Die Produktmenge, bei der die variablen Stückkosten ein Minimum erreichen, ist in der Grafik mit $x_{kv,min}$ bezeichnet. Die Gesamtkosten bei dieser Menge sind $K(x_{kv,min})$. Die Gerade zwischen den Punkten $[0, K_f]$ und $[x_{kv,min}, K(x_{kv,min})]$ ist eine Tangente an K(x). Damit ist die Steigung dieser Tangente die erste Ableitung der Kostenfunktion im Tangentialpunkt, also $K'(x_{kv,min})$.

Andererseits lassen sich auch die variablen Stückkosten grafisch aus einer Abbildung der Kostenfunktion K(x) ermitteln: Diese sind stets gleich der Steigung einer Sekante aus dem Punkt $[0, K_f]$, denn für jede Steigung gilt

(33) $$\text{Steigung} = \frac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Horizontale Differenz}}$$

Die Höhendifferenz bei jeder Sekante aus dem Punkt $[0, K_f]$ ist $K(x) – K_f = K_v(x)$, und die horizontale Differenz ist das zugehörige x. Der Quotient von $K_v(x)$ und x stellt die variablen Stückkosten dar, sodass für die Steigung jeder Sekante aus dem Punkt $[0, K_f]$ gilt:

(34) $$\text{Steigung einer Sekante aus } [0, K_f] = \frac{K_v(x)}{x} = k_v(x)$$

Die niedrigste mögliche Steigung einer solchen Sekante ist erreicht, wenn sie zur Tangente wird. Dies ist im Punkt $[x_{kv,min}, K(x_{kv,min})]$ der Fall. Die Steigung *dieser* Tangente ist $k_v(x_{kv,min}) = k_{v,min}$, denn die Höhendifferenz ist $K(x_{kv,min}) – K_f = K_v(x_{kv,min})$ und die horizontale Differenz $x_{kv,min}$, sodass

(35) $$\text{Steigung der Tangente aus } [0, K_f] = \frac{K_v\left(x_{kv,min}\right)}{x_{kv,min}} = k_{v,min}$$

Die Steigung der Tangente aus dem Punkt [0, K_f] ist also einerseits wie bei jeder Tangente an die Kostenfunktion ihre erste Ableitung K', andererseits aber auch k_v. Damit erfüllt die Steigung dieser Tangente genau die Bedingung K' = k_v für das Minimum der variablen Stückkosten, und die horizontale Differenz des Tangentialpunktes vom Nullpunkt ist die Menge, bei der das Minimum der variablen Stückkosten erreicht wird.

5. Fazit

Die Grenzkosten als Veränderung der Kosten bei Veränderung der Produktmenge um eine Einheit sind bei einer linearen Kostenfunktion die variablen Stückkosten und ebenso die erste Ableitung der Kostenfunktion. Diese Grenzkosten sind bei einer linearen Kostenfunktion konstant.

Bei einer nicht-linearen Kostenfunktion stimmen die variablen Stückkosten, seien es die variablen Stückkosten vor der Mengenänderung oder die nach der Mengenänderung, *nicht* mit den Grenzkosten als Veränderung der Kosten bei Veränderung der Produktmenge um eine Einheit überein. Auch die erste Ableitung der Kostenfunktion stimmt nicht mit den Grenzkosten überein.

Dennoch wird die erste Ableitung auch bei nicht-linearen Kostenfunktionen häufig als Grenzkosten bezeichnet. Diese Grenzkosten, verstanden als erste Ableitung der Kostenfunktion, können zur Ermittlung der Minima von Stückkosten verwendet werden.

Die Grenzkosten als Veränderung der Kosten bei einer beliebigen Veränderung der Produktmenge sind bei linearen und nicht-linearen Kostenfunktionen dadurch zu ermitteln, dass die neue Menge in die Kostenfunktion eingesetzt wird und hiervon die Kosten für die bisherige Menge abgezogen werden. Nur bei linearen Kostenfunktionen können diese Grenzkosten auch dadurch ermittelt werden, indem die Mengenänderung mit den variablen Stückkosten oder mit der ersten Ableitung der Kostenfunktion multipliziert wird.