Aufgabe 1 zu 2.3.3
- Lösung -

Aufgabe 1

a.

$K_f := 100$	Fixkosten
$K_v(x) := 20x$	Variable Kosten
$K(x) := K_f + K_v(x)$	Kostenfunktion
$x_0 := 100$	Menge in der Ausgangslage
$\Delta x := 1$	Mengenänderung
$\Delta K(\Delta x) := K(x_0 + \Delta x) - K(x_0)$	Kostenänderung
$\Delta K(\Delta x) = 20$	

b.

$k_v(x) := \dfrac{K_v(x)}{x}$	Funktion der variablen Stückkosten
$k_v(x_0) = 20$	Variable Stückkosten der Ausgangslage
$k_v(x_0) \cdot \Delta x = 20$	

c.

$K'(x) := \dfrac{d}{dx}K(x) \rightarrow 20$	Erste Ableitung der Kostenfunktion
$K'(x_0) = 20$	
$K'(x_0) \cdot \Delta x = 20$	

d.

Die Ergebnisse von a., b. und c. stimmen überein, weil es sich hier um eine lineare Kostenfunktion handelt. Eine lineare Kostenfunktion lautet allgemein

$$K(x) = K_f + k_v \cdot x$$

wobei k_v eine Konstante ist.

Wird x um eine Einheit erhöht, so erhöht sich K(x) genau um k_v, denn

$$\Delta K(\Delta x = 1) = K(x+1) - K(x)$$

$$= K_f + k_v \cdot (x+1) - K_f - k_v \cdot x$$

Aufgabe 1 zu 2.3.3
- Lösung -

$$= k_v \cdot x + k_v - k_v \cdot x$$

$$= k_v$$

Die erste Ableitung einer linearen Kostenfunktion ist

$$K' = \frac{dK}{dx} = k_v$$

Damit stimmen die erste Ableitung und die variablen Stückkosten bei einer linearen Kostenfunktion stets überein; und diese Größe ist zugleich die Kostenveränderung für eine Einheit.

Aufgabe 2

a.

$K_f := 100$	Fixkosten
$K_v(x) := 20x$	Variable Kosten
$K(x) := K_f + K_v(x)$	Kostenfunktion
$x_0 := 100$	Menge in der Ausgangslage
$\Delta x := 50$	Mengenänderung
$\Delta K(\Delta x) := K(x_0 + \Delta x) - K(x_0)$	Kostenänderung
$\Delta K(\Delta x) = 1000$	

b.

$k_v(x) := \dfrac{K_v(x)}{x}$	Funktion der variablen Stückkosten
$k_v(x_0) = 20$	Variable Stückkosten der Ausgangslage
$k_v(x_0) \cdot \Delta x = 1000$	

c.

$K'(x) := \dfrac{d}{dx} K(x) \rightarrow 20$	Erste Ableitung der Kostenfunktion
$K'(x_0) = 20$	
$K'(x_0) \cdot \Delta x = 1000$	

d.

Wenn die Produktmenge x um Δx erhöht wird, gilt für die Kostenänderung $\Delta K(\Delta x)$ in jedem Fall

Aufgabe 1 zu 2.3.3
- Lösung -

$$\Delta K(\Delta x) = K(x + \Delta x) - K(x)$$

Bei einer linearen Kostenfunktion $K(x) = K_f + k_v \cdot x$ ist k_v konstant und hat deswegen für x und $x + \Delta x$ den gleichen Wert, sodass

$$\Delta K(\Delta x) = K_f + k_v \cdot (x + \Delta x) - K_f - k_v \cdot x$$

$$= k_v \cdot x + k_v \cdot \Delta x - k_v \cdot x$$

$$= k_v \cdot \Delta x$$

Die Lösungen a. und b. sind damit identisch.

Da bei einer linearen Kostenfunktion die variablen Stückkosten k_v zugleich die Steigung der Kostenfunktion K‘ darstellen, lässt sich die Kostensteigerung auch aus der Multiplikation von K‘ mit Δx ermitteln:

$$\Delta K(\Delta x) = K' \cdot \Delta x$$

Aufgabe 3

a.

$K_f := 100$	Fixkosten
$K_V(x) := 0.2x^2$	Variable Kosten
$K(x) := K_f + K_V(x)$	Kostenfunktion
$x_0 := 100$	Menge in der Ausgangslage
$\Delta x := 1$	Mengenänderung
$\Delta K(\Delta x) := K(x_0 + \Delta x) - K(x_0)$	Kostenänderung
$\Delta K(\Delta x) = 40.2$	

b.

$k_V(x) := \frac{K_V(x)}{x}$	Funktion der variablen Stückkosten
$k_V(x_0) = 20$	Variable Stückkosten der Ausgangslage
$k_V(x_0) \cdot \Delta x = 20$	

c.

Aufgabe 1 zu 2.3.3
- Lösung -

$K'(x) := \frac{d}{dx}K(x) \rightarrow 0.4x$ Erste Ableitung der Kostenfunktion

$K'(x_0) = 40$

$K'(x_0)\cdot\Delta x = 40$

d.

Die Kostenänderung $K(x+1)-K(x)$ stimmt hier nicht mit den variablen Stückkosten der Ausgangslage und auch nicht mit der ersten Ableitung der Kostenfunktion überein. Der Grund liegt darin, dass die Kostenfunktion nicht linear ist. Das bedeutet, dass die variablen Stückkosten für unterschiedliche Werte von x ebenfalls unterschiedlich sind.

Seien $k_{v,0}$ die variablen Stückkosten bei der Menge x_0 und $k_{v,1}$ die variablen Stückkosten bei der Menge x_0+1, dann ist die Kostenänderung

$$K(x_0+1)-K(x_0) = K_f + k_{v,1}\cdot(x_0+1) - k_{v,0}\cdot x_0$$

$$= k_{v,1}\cdot x_0 + k_{v,1} - k_{v,0}\cdot x_0 \neq k_{v,0}$$

Die Kostenänderung wäre nur dann $k_{v,0}$, wenn $k_{v,0} = k_{v,1}$, was bei einer nicht-linearen Kostenfunktion gerade nicht der Fall ist.

Für die erste Ableitung der Kostenfunktion muss man bedenken, dass bei einer nicht-linearen Kostenfunktion k_v sich mit der Menge ändert, also selbst eine Funktion von x ist. Eine nicht-lineare Kostenfunktion lautet also in allgemeiner Formulierung

$$K(x) = K_f + k_v(x)\cdot x$$

Die erste Ableitung dieser Funktion ist

$$K' = \frac{dK}{dx} = k_v(x) + k_v'(x)\cdot x$$

Für $x = x_0$ ergibt sich also

$$K'(x_0) = k_v(x_0) + k_v'(x_0)\cdot x_0$$

Auch dieser Wert ist nicht gleich der richtigen Kostenänderung. Insgesamt gilt vielmehr

$$K(x_0+1)-K(x_0) = k_{v,1}\cdot x_0 + k_{v,1} - k_{v,0}\cdot x_0 \neq k_{v,0} \neq K'(x_0) = k_v(x_0) + k_v'(x_0)\cdot x_0$$

Die Ungleichungen werden nur dann zu Gleichungen, wenn $k_{v,0} = k_{v,1}$, was bei einer nicht-linearen Kostenfunktion definitionsgemäß nicht der Fall ist, und wenn $k_v'(x) = 0$, was nur bei einer linearen Kostenfunktion der Fall ist oder bei einer nicht-linearen Kostenfunktion im Minimum von k_v, aber nicht für alle x.

Aufgabe 4

a.

Aufgabe 1 zu 2.3.3
- Lösung -

$K_f := 100$	Fixkosten
$K_v(x) := 0.2x^2$	Variable Kosten
$K(x) := K_f + K_v(x)$	Kostenfunktion
$x_0 := 100$	Menge in der Ausgangslage
$\Delta x := 50$	Mengenänderung
$\Delta K(\Delta x) := K(x_0 + \Delta x) - K(x_0)$	Kostenänderung

$\Delta K(\Delta x) = 2500$

b.

$k_v(x) := \frac{K_v(x)}{x}$	Funktion der variablen Stückkosten
$k_v(x_0) = 20$	Variable Stückkosten der Ausgangslage

$k_v(x_0)\cdot\Delta x = 1000$

c.

$K'(x) := \frac{d}{dx}K(x) \rightarrow 0.4x$	Erste Ableitung der Kostenfunktion

$K'(x_0) = 40$

$K'(x_0)\cdot\Delta x = 2000$

d.

Die Kostenänderung ist

$$K(x_0 + \Delta x) - K(x_0) = K_f + k_{v,1}\cdot(x_0 + \Delta x) - K_f - k_{v,0}\cdot x_0$$

$$= k_{v,1}\cdot x_0 + k_{v,1}\cdot\Delta x - k_{v,0}\cdot x_0$$

Die mit der Mengenänderung multiplizierten variablen Stückkosten der Ausgangslage sind

$$k_{v,0}\cdot\Delta x \neq k_{v,1}\cdot x_0 + k_{v,1}\cdot\Delta x - k_{v,0}\cdot x_0$$

Die mit der Mengenänderung multiplizierte erste Ableitung der Kostenfunktion bei x_0 ist

$$\left[k_v(x_0) + k_v{}'(x_0)\cdot x_0\right]\cdot\Delta x \neq k_{v,1}\cdot x_0 + k_{v,1}\cdot\Delta x - k_{v,0}\cdot x_0$$