

## Der binomische Lehrsatz

Ein Binom ist die Summe aus zwei Gliedern, etwa  $a + b$ . Potenziert man dieses Binom mit einer nicht-negativen ganzen Zahl  $n$ , so gilt nach dem binomischen Lehrsatz

$$(1) \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

*Beweis*<sup>1</sup>

Für die trivialen Fälle  $n = 0$  und  $n = 1$  benötigt man den binomischen Lehrsatz nicht. Aus den Rechenregeln für Potenzen ergibt sich ohne Weiteres:

$$(2) \quad (a+b)^0 = 1$$

$$(3) \quad (a+b)^1 = a+b$$

Für  $n > 1$  sind aber nun mindestens zwei Klammern vorhanden, die miteinander multipliziert werden müssen. Zum Beispiel:

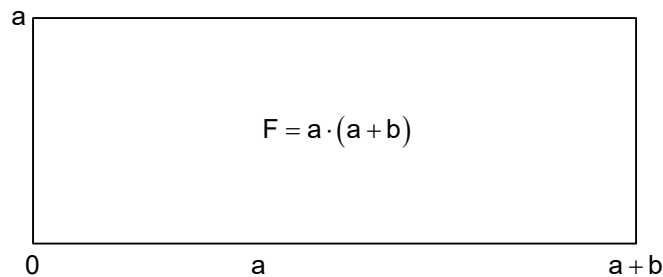
$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b)$$

Hier ist das Distributivgesetz anzuwenden. Dieses lautet, zunächst auf  $a \cdot (a+b)$  angewandt:

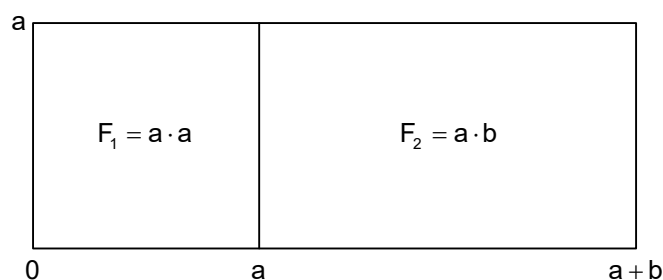
$$a \cdot (a+b) = a \cdot a + a \cdot b$$

Man sagt: Die Multiplikation ist distributiv bezüglich der Addition<sup>2</sup>, das heißt, die Multiplikation wird auf alle Elemente der Summe in der Klammer angewandt.

Die Gültigkeit des Distributivgesetzes kann nachgewiesen werden, wenn man das Produkt  $a \cdot (a+b)$  als Fläche darstellt. Ein Rechteck mit der Höhe  $a$  und der Breite  $a+b$  hat eben die Fläche  $F = a \cdot (a+b)$ :



Dieselbe Fläche ergibt sich, wenn entsprechend dem Distributivgesetz  $a$  erst mit  $a$  und dann mit  $b$  multipliziert wird und die beiden Teilflächen addiert werden:



Es ist evident, dass  $F_1$  und  $F_2$  die Fläche  $F$  bilden, dass also

<sup>1</sup> Der Beweis folgt weitgehend W. Böhme, Erscheinungsformen und Gesetze des Zufalls, Braunschweig 1964, S. 30 ff.

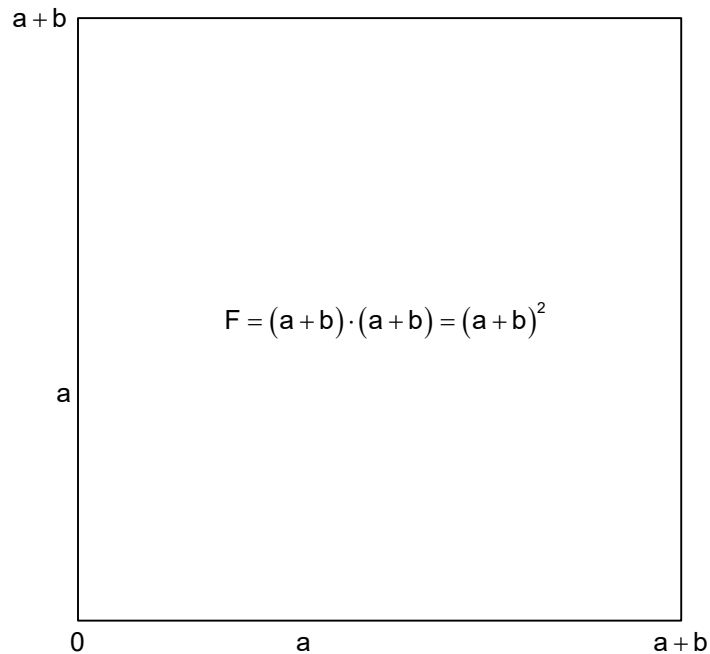
<sup>2</sup> Vgl. Brockhaus Enzyklopädie, Viertes Band, 17. Auflage Wiesbaden 1968, S. 787

## Der binomische Lehrsatz

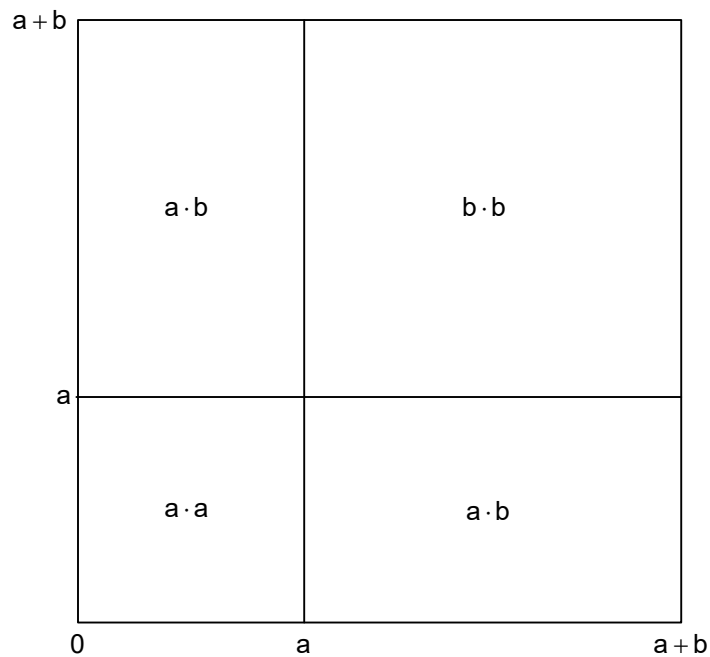
$$a \cdot (a + b) = a^2 + a \cdot b$$

Die Höhe  $a$  des Rechtecks muss mit der gesamten Breite  $a + b$  multipliziert werden, um die richtige Fläche zu erhalten. Die Multiplikation mit  $a$  muss auf die Summe  $a + b$  angewandt werden. Dies ist das Distributivgesetz.

Wenn die Höhe des Rechtecks selbst eine Summe ist, zum Beispiel die Summe  $a + b$ , muss auch in diesem Fall die Höhe mit der gesamten Breite multipliziert werden:



Die Höhe und Breite nach ihren Summanden aufgeteilt:



Um die richtige Fläche  $(a + b)^2$  zu erhalten, müssen beide Summanden der Höhe  $a + b$  mit beiden Summanden der Breite  $a + b$  multipliziert werden. Das Ergebnis ist

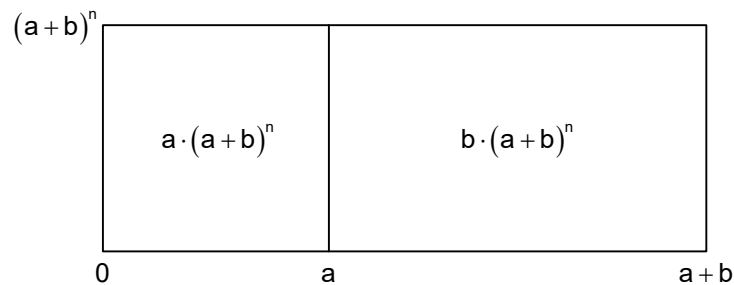
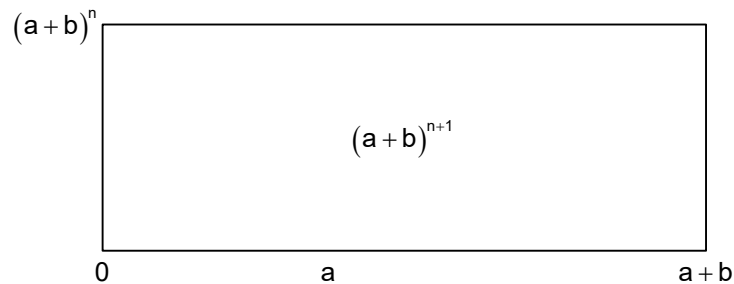
## Der binomische Lehrsatz

$$(a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + a \cdot b + b \cdot b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Das ist genau das Ergebnis, welches aus dem Distributivgesetz folgt. Das Distributivgesetz wird hier bestätigt.

Beträgt die Höhe  $(a + b)^n$  und die Breite wieder  $a + b$ , ist die Fläche  $(a + b)^{n+1}$ . Mit einer im Maßstab verkleinerten Höhe ergibt sich folgende Darstellung:



Die Multiplikation der Summe  $(a + b)^n$  mit dem Faktor  $a + b$  bedeutet also wieder, dass alle Elemente von  $(a + b)^n$  mit allen Elementen der Summe  $a + b$  multipliziert werden müssen, um das richtige Ergebnis  $(a + b)^{n+1}$  zu erhalten. Da die Erhöhung von  $n$  auf  $n + 1$  erfolgt, gilt diese Aussage und damit das Distributivgesetz für jeden Wert von  $n$ . Es bleibt einem also nicht erspart, die Summe  $(a + b)^n$  entsprechend dem Distributivgesetz zu berechnen, indem jeder Summand eines Faktors mit jeweils einem Summanden aller anderen Faktoren multipliziert und dann addiert wird.

Dies indessen ist nur für kleine Werte von  $n$  einfach. Als Beispiel sei der bereits behandelte Fall  $n = 2$  betrachtet. Vorübergehend erhalten die Summanden der ersten Klammer den Index 1 und die Summanden der zweiten Klammer den Index 2. Es ist also die Aufgabe  $(a_1 + b_1) \cdot (a_2 + b_2)$  zu lösen.

Der erste Summand der ersten Klammer mit den Summanden der zweiten Klammer multipliziert und addiert ergibt  $a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2$ . Der zweite Summand der ersten Klammer mit den Summanden der zweiten Klammer multipliziert ergibt  $b_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2$ , sodass

$$(4) \quad (a_1 + b_1) \cdot (a_2 + b_2) = a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2$$

Jedes Produkt enthält die vollständige Indexreihe 1, 2. Man erkennt daran, dass die einzelnen Produkte jeweils aus je einem Element jeder Klammer gebildet wurden, wie es das Distributivgesetz erfordert. Die Anzahl der Faktoren in einem Produkt ist gleich der Anzahl der Klammern, denn aus jeder Klammer ist genau ein Element enthalten.

Werden die Indizes wieder weggelassen, ergibt sich für den Fall  $n = 2$

## Der binomische Lehrsatz

$$(5) \quad (a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

Betrachtet man die Gleichungen (4) und (5) gemeinsam, werden an diesem einfachen Fall schon einige Gesetzmäßigkeiten sichtbar. Beim Ausmultiplizieren der Klammern wurden zunächst die ersten Elemente  $a$  aller Klammern miteinander multipliziert, was hier  $a^2$  ergibt, im allgemeinen Fall wegen des Vorliegens von  $n$  Klammern  $a^n$ . Ein Element der gesuchten Summe des potenzierten Binoms ist also  $a^n$ . Ebenso werden alle an zweiter Stelle stehenden Elemente der Klammern miteinander multipliziert, was  $b^n$  ergibt. Bevor die Summanden  $a \cdot b$  und  $b \cdot a$  in Gleichung (5) umsortiert und zu  $2ab$  zusammengefasst werden, sieht man im Vergleich zu Gleichung (4), dass die Stellung der Faktoren angibt, aus welcher Klammer die Faktoren stammen. Im Produkt  $a \cdot b$  stammt das  $a$  aus der ersten Klammer, das  $b$  aus der zweiten. Im Produkt  $b \cdot a$  stammt das  $b$  aus der ersten Klammer und das  $a$  aus der zweiten. Unabhängig von der Sortierung müssen in jedem Produkt so viele Faktoren enthalten sein, wie es Klammern gibt, also  $n$ , und jeder Faktor muss aus einer anderen Klammer stammen. Aus welcher, das sagt seine Stellung im Produkt, wenn man die Sortierung zunächst beibehält.

Zur weiteren Verallgemeinerung werden noch die Fälle  $(a_1 + b_1) \cdot (a_2 + b_2) \cdot (a_3 + b_3)$  und  $(a + b)^3$  betrachtet. Es ergibt sich

$$(6) \quad (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3) = a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 a_3 + a_1 b_2 b_3 + b_1 a_2 a_3 + b_1 a_2 b_3 + b_1 b_2 a_3 + b_1 b_2 b_3$$

$$(7) \quad (a + b)^3 = aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Da die einzelnen Produkte nur aus den Faktoren  $a$  und  $b$  bestehen, die Anzahl der Faktoren aber  $n$  sein muss, bedeutet die schrittweise Verminderung der Anzahl eines Faktors eine entsprechende Erhöhung der Anzahl des anderen Faktors. Im Fall  $n = 3$  ist  $a$  mit den Faktoren  $a^3$ ,  $a^2$ ,  $a^1$ ,  $a^0$  vertreten. Entsprechend steigt die Potenz von  $b$ , nämlich von  $b^0$  auf  $b^1$ ,  $b^2$  und  $b^3$ , sodass sich die Produkte  $a^3b^0$ ,  $a^2b^1$ ,  $a^1b^2$ ,  $a^0b^3$  ergeben. Allgemein gilt: Ist  $k$  der Exponent von  $b$ , muss  $n - k$  der Exponent von  $a$  sein, denn nur dann ist die Summe der Exponenten und damit die Anzahl der Faktoren  $n - k + k = n$ . In jedem Summanden des potenzierten Binoms ist also das Produkt

$$(8) \quad a^{n-k} \cdot b^k$$

enthalten. Für  $k$  muss angenommen werden, dass nur die Werte  $k = 0, 1, \dots, n$  möglich sind. Bei  $k = 0$  ergibt sich der Summand  $a^{n-k} \cdot b^k = a^{n-0} \cdot b^0 = a^n$ . Für  $k = 1$  ergibt sich  $a^{n-1} \cdot b^1 = a^{n-1} \cdot b$ , für  $k = 2$   $a^{n-2} \cdot b^2$ , und für  $k = n$  ist das Produkt  $a^0 \cdot b^n = b^n$ .

Wie die Gleichungen (5) und (7) zeigen, können die Summanden mehrfach auftreten. In Gleichung (5) sind dies  $ab$  und  $ba$ , zusammengefasst zu  $2ab$ , in Gleichung (7)  $aab$ ,  $aba$ ,  $baa$ , zusammengefasst zu  $3a^2b$ , sowie  $abb$ ,  $bab$ ,  $bba$ , zusammengefasst zu  $3ab^2$ . Was die Summanden unterscheidet, ist ihre Anordnung. Das Element an erster Stelle stammt aus der ersten Klammer, das Element an zweiter Stelle aus der zweiten usw. Die Frage ist, wie viele mögliche Anordnungen von je einem Element aus  $n$  verschiedenen Klammern es gibt.

Man nennt eine Anordnung von  $n$  Elementen in irgendeiner Reihenfolge eine *Permutation*, und somit gilt es, alle Permutationen zu finden, die möglich sind. Setzt man  ${}_n P$  für die Anzahl möglicher Permutationen von  $n$  Elementen, so ist zum Beispiel für die Permutation  $ab$   ${}_2 P = 2$ , denn es gibt zwei Möglichkeiten, die Elemente  $a$  und  $b$  anzuordnen.

Wie aber ist  ${}_n P$  allgemein zu bestimmen? Für  $n$  Elemente gibt es in der Permutation  $n$  Plätze, und man stelle sich vor, dass diese Plätze nacheinander besetzt werden. Für das erste Element gibt es dann genau  $n$  Möglichkeiten, einen Platz auszuwählen. Für das zweite Element gibt es einen Platz weniger, es kann also auf  $n - 1$  verschiedene Plätze gesetzt werden. Jede dieser Möglichkeiten kann mit einem der  $n$  Plätze für das erste Element kombiniert werden, damit vervielfacht sich die Zahl der Möglichkeiten um  $n$ . Die Anzahl der Möglichkeiten für die Besetzung der ersten beiden Plätze ist  $n \cdot (n - 1)$ . Für den dritten Platz gibt es  $n - 2$  Möglichkeiten, was zusammen mit den Möglichkeiten für die ersten beiden Plätze  $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)$  ergibt. So geht es weiter bis zum letzten Platz, für dessen Besetzung es nur noch eine Möglichkeit gibt. Die Möglichkeiten aller Stufen der Besetzung sind miteinander zu

## Der binomische Lehrsatz

multiplizieren, um die Gesamtzahl der Möglichkeiten zu erhalten. Damit ist die Anzahl der möglichen Permutationen von  $n$  Elementen

$${}_n P = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

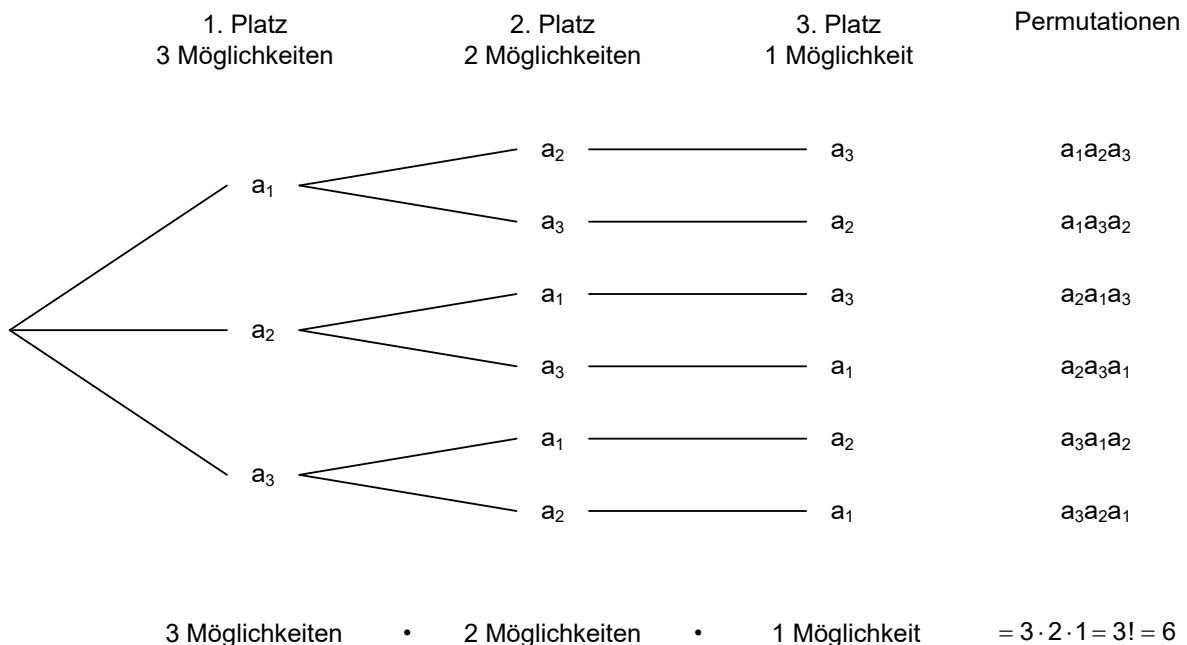
Das Produkt der ersten  $n$  natürlichen Zahlen  $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$  wird geschrieben als  $n!$  (gesprochen: „ $n$  Fakultät“). Somit ist die Anzahl der möglichen Permutationen von  $n$  Elementen

$${}_n P = n!$$

So ist die Anzahl der möglichen Permutationen der drei Elemente  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$   $3! = 6$ , nämlich

$a_1 a_2 a_3$   
 $a_1 a_3 a_2$   
 $a_2 a_1 a_3$   
 $a_2 a_3 a_1$   
 $a_3 a_1 a_2$   
 $a_3 a_2 a_1$

Diese möglichen Anordnungen lassen sich mithilfe eines Entscheidungsbaumes herausfinden:



Man sieht hier, dass die Anzahl der Möglichkeiten für die Besetzung jedes Platzes mit der Anzahl der Möglichkeiten der vorherigen Stufen der Stellenbesetzung multipliziert werden muss, um die Gesamtzahl aller möglichen Stellenbesetzungen – die Permutationen – herauszufinden<sup>3</sup>.

Nun sind die Summanden eines potenzierten Binoms zwar Permutationen, aber die Elemente sind nicht wie in der Permutation  $a_1 a_2 a_3$  alle verschieden, sondern sie bestehen nur aus den Elementen  $a$  und  $b$ , wobei die Stellung der einzelnen Elemente in der Permutation angibt, aus der wievielten Klammer 1 bis  $n$  das jeweilige Element stammt. Gemäß Ausdruck (8) gibt es in jedem Summanden des potenzierten Binoms  $n - k$  Mal den Faktor  $a$  und  $k$  Mal den Faktor  $b$ . Es handelt sich also um Permutationen, in denen die Elemente  $a$  und  $b$  mehrfach vorkommen, und die Frage ist, wie viele unterschiedliche Permutationen es dann gibt.

Betrachtet man zunächst die Permutation  $aaa$ , so lassen sich aus diesen drei Elementen ebenso wie aus den Elementen  $a_1 a_2 a_3$   $3! = 6$  Permutationen bilden. Die 6 Permutationen der Elemente  $aaa$  lassen sich aber nicht voneinander unterscheiden und sind deswegen nur einmal zu zählen. Um dies zu

<sup>3</sup> Es sei darauf hingewiesen, dass diese Aussage ohne Weiteres aus dem *Fundamentalprinzip der Kombinatorik* folgt, vgl. hierzu J. Schira, *Statistische Methoden der VWL und BWL*, 2. Aufl. München 2005, S. 201 f.

## Der binomische Lehrsatz

bewerkstelligen, ist der Zusammenhang zwischen den unterscheidbaren und den nicht unterscheidbaren Permutationen aufzuklären.

Wenn in einer Menge von Permutationen eine gewisse Anzahl nicht unterscheidbare Permutationen gleichartiger Elemente enthalten ist, können die Anordnungsmöglichkeiten der unterscheidbaren Permutationen mit denen der nicht unterscheidbaren kombiniert werden und ergeben dann alle möglichen Kombinationen. Es gilt also

$$\begin{array}{c} \text{Anzahl der unterscheidbaren} \\ \text{Permutationen} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{Anzahl der nicht} \\ \text{unterscheidbaren Permutationen} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Anzahl aller} \\ \text{Permutationen} \end{array}$$

Wenn sich unter den Permutationen eine weitere Gruppe gleichartiger Elemente befindet, muss diese neu hinzukommende Anzahl möglicher Anordnungen mit den bisherigen multipliziert werden, um die Gesamtzahl aller möglichen Permutationen zu erhalten:

$$\begin{array}{c} \text{Anzahl der} \\ \text{unterscheidbaren} \\ \text{Permutationen} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{Anzahl der nicht} \\ \text{unterscheidbaren} \\ \text{Permutationen des} \\ \text{Typs 1} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{Anzahl der nicht} \\ \text{unterscheidbaren} \\ \text{Permutationen des} \\ \text{Typs 2} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Anzahl aller} \\ \text{Permutationen} \end{array}$$

Setzt man  $n_1$  und  $n_2$  für die Anzahl jeweils gleicher Elemente, die in einer Menge von  $n$  Elementen enthalten sind, dann ist die Anzahl der nicht unterscheidbaren Permutationen des Typs 1  $n_1!$  und die Anzahl der nicht unterscheidbaren Permutationen des Typs 2  $n_2!$ . Die Anzahl aller Permutationen von  $n$  Elementen ist  $n!$ . Mit  ${}_n P_{n_1, n_2}$  für die Anzahl der unterscheidbaren Permutationen von  $n$  Elementen, unter denen sich  $n_1$  und  $n_2$  jeweils gleiche Elemente befinden, lässt sich der obige Zusammenhang dann folgendermaßen formulieren:

$${}_n P_{n_1, n_2} \cdot n_1! \cdot n_2! = n!$$

Hieraus folgt für die Anzahl der unterscheidbaren Permutationen von  $n$  Elementen, unter denen sich  $n_1$  und  $n_2$  jeweils gleiche Elemente befinden:

$$(9) \quad {}_n P_{n_1, n_2} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2!}$$

Für jeden Summanden eines potenzierten Binoms gilt nach Ausdruck (8), dass  $n - k$  Elemente  $a$  miteinander und mit  $k$  Elementen  $b$  multipliziert werden. Die Anzahl eines jeden Summanden  $a^{n-k} \cdot b^k$  ist die Anzahl möglicher Permutationen der  $n - k$  Elemente  $a$  und der  $k$  Elemente  $b$ . Hierfür gilt Gleichung (9) mit  $n_1 = n - k$  und  $n_2 = k$ :

$$(10) \quad {}_n P_{n-k, k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Den Ausdruck  $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$  schreibt man abkürzend  $\binom{n}{k}$  (gesprochen: „ $n$  über  $k$ “). Man kann also

sagen: Die Anzahl der möglichen Anordnungen von  $n$  Elementen, unter denen sich jeweils  $n - k$  und  $k$  gleiche Elemente befinden, ist

$$(11) \quad {}_n P_{n-k, k} = \binom{n}{k}$$

In jedem Summanden eines potenzierten Binoms  $(a + b)^n$  sind nun  $n - k$  Faktoren  $a$  und  $k$  Faktoren  $b$  enthalten. Für ein bestimmtes  $k$  gibt es so viele verschiedene Zusammenstellungen der Faktoren  $a$  und  $b$ , wie diese Faktoren aus allen Klammern miteinander kombiniert werden können, und das sind genau die möglichen Zusammenstellungen von  $n$  Elementen, unter denen sich  $n - k$  und  $k$  jeweils

## Der binomische Lehrsatz

gleiche Elemente befinden, also  $\binom{n}{k}$ . Der Summand  $a^{n-k} \cdot b^k$  kommt im potenzierten Binom  $\binom{n}{k}$  Mal vor, sodass der gesamte Beitrag dieses Summanden zur Summe  $\binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$  beträgt. Der Faktor  $\binom{n}{k}$  wird deswegen auch Binomialkoeffizient genannt.

Um die Gesamtsumme des potenzierten Binoms  $(a + b)^n$  zu ermitteln, müssen für  $k = 0, 1, \dots, n$  alle Summanden  $a^{n-k} \cdot b^k$  mit ihrem jeweiligen Binomialkoeffizienten multipliziert und addiert werden. Die Summe des potenzierten Binoms ist somit

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Das ist nach Gleichung (1) der binomische Lehrsatz, womit dieser bewiesen ist.

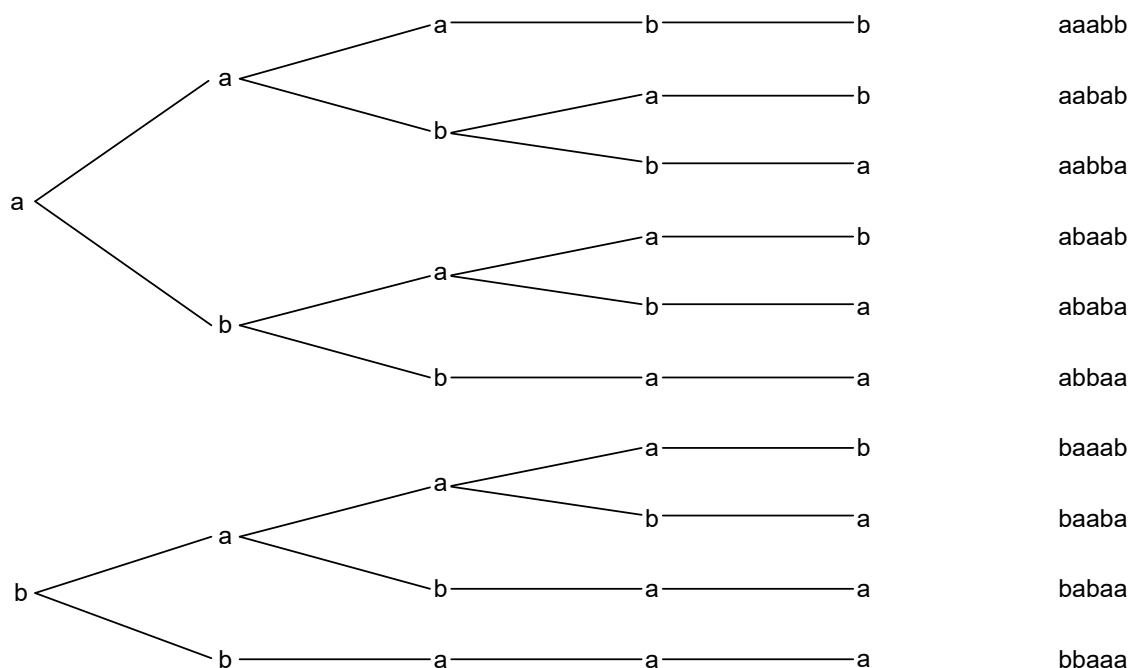
Die Anwendung des binomischen Lehrsatzes zeigt, welche Erleichterung der Satz für die Berechnung von potenzierten Binomen darstellt. Als Beispiel sei das Binom  $(a + b)^5$  betrachtet. Hierin ist einer der Summanden  $a^3b^2$ . Wie häufig kommt dieser Summand vor?

Es gilt hier nach Ausdruck (8)  $a^{n-k} \cdot b^k = a^3b^2$ , das heißt  $n$  beträgt 5 und  $k$  ist 2. Für diese Werte ist der Binomialkoeffizient nach Gleichung (11)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10$$

Der Summand  $a^3b^2$  kommt 10 Mal vor.

Ohne den binomischen Lehrsatz kommt man nur viel umständlicher zu diesem Ergebnis – man muss alle Fälle einzeln aufzählen. Dies sei, auch zur Kontrolle, im Folgenden durchgeführt. Das Instrument ist wieder der Entscheidungsbaum. Es gibt folgende Möglichkeiten, 3 Elemente  $a$  mit 2 Elementen  $b$  zu kombinieren:



## Der binomische Lehrsatz

An diesem Beispiel sei noch einmal erläutert, wie die Summanden des potenzierten Binoms zustande kommen. Es muss ja im konkreten Fall ein Produkt aus 3  $a$  und 2  $b$  gebildet werden. Für den ersten Faktor aus der ersten Klammer gibt es zwei Möglichkeiten,  $a$  oder  $b$ . Wird  $a$  gewählt, kann für den zweiten Faktor ebenfalls  $a$  oder  $b$  gewählt werden. Wählt man auch hier  $a$ , sind im Produkt bereits 3  $a$  enthalten, und aus der vierten und fünften Klammer kommt jeweils nur noch ein  $b$  hinzu. Das Produkt lautet also  $aaabb$ . So kann man wie oben dargestellt vorgehen und erhält dann alle möglichen Zusammenstellungen von 3 Elementen  $a$  und 2 Elementen  $b$ , eben alle möglichen Permutationen von 5 Elementen, von denen jeweils 3 und 2 Elemente gleich sind. Es bestätigt sich, wie vom binomischen Lehrsatz vorhergesagt, dass es sich um 10 mögliche Permutationen handelt. Mithilfe des binomischen Lehrsatzes kann man es sich aber ersparen, alle Permutationen einzeln aufzuführen. Da es bei den Produkten auf die Reihenfolge der Faktoren nicht ankommt, werden die 10 mühsam ermittelten Permutationen ohnehin zu  $10a^3b^2$  zusammengefasst, und dieses Ergebnis erhält man mit dem binomischen Lehrsatz unmittelbar.

Die vom binomischen Lehrsatz beanspruchte Allgemeingültigkeit muss sich nun auch an den Fällen bewähren, für die man den Lehrsatz gar nicht braucht, nämlich für die Fälle  $n = 0$  und  $n = 1$ . In diesen Fällen muss sich, wie in Gleichung (2) und (3) bereits postuliert, 1 bzw.  $a + b$  ergeben.

Für  $n = 0$  ist nach dem binomischen Lehrsatz in der Formulierung von Gleichung (1)  $k = 0$ . Es ergibt sich also

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0} \cdot a^0 \cdot b^0 = \binom{0}{0} \cdot 1 = \frac{0!}{0! \cdot 0!}$$

Es muss sich aber nach Gleichung (2) hierfür der Wert 1 ergeben. Dies ist nur dann möglich, wenn man  $0!$  und  $\binom{0}{0}$  mit eben diesem Wert definiert. Es gilt deswegen

$$(12) \quad 0! = 1$$

$$(13) \quad \binom{0}{0} = 1$$

Für  $n = 1$  nimmt  $k$  die Werte 0 und 1 an. Nach dem binomischen Lehrsatz ist dann

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} \cdot a^{1-k} \cdot b^k = \binom{1}{0} \cdot a^1 \cdot b^0 + \binom{1}{1} \cdot a^0 \cdot b^1 = \binom{1}{0} \cdot a + \binom{1}{1} \cdot b = \frac{1!}{1! \cdot 0!} \cdot a + \frac{1!}{0! \cdot 1!} \cdot b = \frac{a}{0!} + \frac{b}{0!}$$

Mit  $0! = 1$  ist  $\frac{a}{0!} + \frac{b}{0!} = a + b$ , was zu erwarten war.

Aus der vorstehenden Anwendung des binomischen Lehrsatzes auf den Fall  $n = 1$  lassen sich weitere Schlüsse ziehen, wenn in den Klammern  $n$  nicht durch 1 ersetzt wird. Die Ableitung lautet dann

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k = \binom{n}{0} \cdot a^1 \cdot b^0 + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^1$$

$\binom{n}{0}$  ist nun der allgemein formulierte Binomialkoeffizient des ersten Summanden und  $\binom{n}{n}$  ist der

Binomialkoeffizient des letzten Summanden eines potenzierten Binoms. Für  $n = 1$  müssen diese Koeffizienten den Wert 1 haben. Die Frage ist, ob dies für alle  $n$  gilt. Dies lässt sich klären, wenn man

einfach die Definition  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$  auf diese Fälle anwendet:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1$$



## Der binomische Lehrsatz

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)! \cdot n!} = \frac{1}{0!} = 1$$

Es gilt also allgemein

$$(14) \quad \binom{n}{0} = 1$$

$$(15) \quad \binom{n}{n} = 1$$

Der Vollständigkeit halber sei noch der Fall  $\binom{n}{1}$  untersucht, der Binomialkoeffizient des jeweils zweiten Summanden eines potenzierten Binoms:

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} = n$$

$$(16) \quad \binom{n}{1} = n$$

Für  $n = 2$  ergibt der binomische Lehrsatz

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \cdot a^{2-k} \cdot b^k = \binom{2}{0} \cdot a^2 \cdot b^0 + \binom{2}{1} \cdot a^1 \cdot b^1 + \binom{2}{2} \cdot a^0 \cdot b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Somit lässt sich der binomische Lehrsatz auch folgendermaßen explizit formulieren:

$$(17) \quad (a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 \dots + \binom{n}{n-2} \cdot a^2 \cdot b^{n-2} + \binom{n}{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n$$

Wegen  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$  haben der erste und der letzte Summand des potenzierten Binoms denselben

Koeffizienten, nämlich 1. Diese Symmetrie gilt auch für den zweiten Summanden und den vorletzten, den dritten Summanden und den drittletzten, wie man aber besser am explizit formulierten binomischen Lehrsatz in der folgenden Fassung sieht:

$$(18) \quad (a+b)^n = a^n + \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} a^{n-1} b + \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} a^{n-2} b^2 \dots + \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} a^2 b^{n-2} + \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} a b^{n-1} + b^n$$

Der zweite Summand hat den Binomialkoeffizienten  $\frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!}$ , der vorletzte  $\frac{n!}{1! \cdot (n-1)!}$ . Wegen

$(n-1)! \cdot 1! = 1! \cdot (n-1)!$  sind beide identisch. Die Binomialkoeffizienten des dritten und des drittletzten

Summanden sind wegen  $\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!}$  ebenfalls identisch. Die Reihe der Binomial-

koeffizienten scheint also symmetrisch aufgebaut zu sein.

Allgemein gilt, dass die Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$  für ein bestimmtes  $n$  dadurch gebildet werden, dass

$k$  die Werte 0 bis  $n$  annimmt. Der Binomialkoeffizient  $\binom{n}{k=0}$  steht an der ersten Stelle, der Binomial-

## Der binomische Lehrsatz

Koeffizient  $\binom{n}{k=1}$  an der zweiten usw. bis zum Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k=n}$  an der letzten Stelle.

Der Wert von  $k$  gibt an, wie viele Binomialkoeffizienten dieser Reihe vor  $\binom{n}{k}$  stehen. Ist  $k=0$ , so stehen 0 Koeffizienten vor diesem, er ist der erste. Ist  $k=1$ , steht einer davor, das heißt  $\binom{n}{1}$  ist der zweite, und bei  $k=n$  stehen  $n$  Koeffizienten vor  $\binom{n}{k}$ , es ist der letzte.

Lautet der Binomialkoeffizient aber  $\binom{n}{n-k}$ , dann bedeutet  $k=0$ , dass dieser Binomialkoeffizient an letzter Stelle steht, denn  $\binom{n}{n-k}$  ist dann  $\binom{n}{n}$ , und das ist der an letzter Stelle stehende

Binomialkoeffizient. Für  $k=n$  gilt  $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{0}$ , das ist der erste Koeffizient. Der Wert von  $k$  gibt also

beim Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{n-k}$  an, wie viele Koeffizienten noch folgen. Bei gleichem  $k$  sind die

Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$  und  $\binom{n}{n-k}$  also gleich weit vom Anfang bzw. vom Ende der Reihe entfernt. Sind die beiden Koeffizienten einander gleich, ist die Reihe symmetrisch. Die Reihe der Binomialkoeffizienten ist also symmetrisch, wenn

$$(19) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Der Beweis ist einfach; man muss nur die Definition der abkürzenden Schreibweise  $\binom{n}{k}$  anwenden.

Es gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-[n-k])! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Da die rechten Seiten der beiden Gleichungen einander gleich sind, sind es auch die linken Seiten. Gleichung (19) ist damit bewiesen.

Ordnet man die Binomialkoeffizienten für  $n=0$ ,  $n=1$ ,  $n=2$  usw. untereinander an, so zeigt sich das Bild eines Dreiecks, welches zu Ehren des französischen Mathematikers und Philosophen Blaise Pascal „Pascalsches Dreieck“ genannt wird<sup>4</sup>.

Mit  $n=0 \dots 5$  und mit Verwendung der Definition der Binomialkoeffizienten ergibt sich das folgende Pascalsche Dreieck:

---

<sup>4</sup> Eine Abbildung der ursprünglichen Version Pascals findet sich zum Beispiel bei M. Merz / M. V. Wüthrich, Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, München 2013, S. 93



## Der binomische Lehrsatz

Beschränkt man die Elemente des Pascalschen Dreiecks auf die Werte der Binomialkoeffizienten, zeigt sich das folgende Bild:

$n = 0$												1									
$n = 1$											1	1									
$n = 2$											1	2	1								
$n = 3$											1	3	3	1							
$n = 4$											1	4	6	4	1						
$n = 5$											1	5	10	10	5	1					
$n = 6$											1	6	15	20	15	6	1				
$n = 7$											1	7	21	35	35	21	7	1			
$n = 8$											1	8	28	56	70	56	28	8	1		
$n = 9$											1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
$n = 10$											1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Pascal bemerkte, dass die Summe von zwei nebeneinander stehenden Binomialkoeffizienten einer Reihe gerade den darunter stehenden Binomialkoeffizienten der nächsten Reihe ergibt. So ist der zweite Koeffizient der Reihe  $n = 9$  (der zehnten Reihe, da die erste Reihe mit 0 beginnt) 9, der nächste in dieser Reihe ist 36; beide zusammen ergeben 45, den dritten Koeffizienten der Reihe  $n = 10$ . Es gilt also offenbar

$$\binom{9}{1} + \binom{9}{2} = \binom{10}{2}$$

Mithilfe dieses Zusammenhangs lässt sich das Pascalsche Dreieck leicht nach unten fortsetzen, denn der Zusammenhang ist allgemeingültig, wie im Folgenden bewiesen wird.

Allgemein lautet die Behauptung

$$(20) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Zur Überprüfung dieser Behauptung wird statt der abkürzenden Schreibweise  $\binom{n}{k}$  die Schreibweise

$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$  angewandt. Dies ergibt für die linke Seite von Gleichung (20)

$$(21) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} + \frac{n!}{(n-[k+1])! \cdot (k+1)!}$$

Der in Gleichung (21) enthaltene Ausdruck  $(n-[k+1])!$  wird gesondert betrachtet. Erweitert man dieses Produkt um ein Element, so ist nach dem Bildungsgesetz von Fakultäten der nächste Faktor der um 1 erhöhte bisherige letzte Faktor  $(n-[k+1])$ , also  $(n-[k+1]+1)$ . Dies ergibt die neue Fakultät  $(n-[k+1]+1)!$ . Die Identität  $(n-[k+1])! \cdot (n-[k+1]+1) = (n-[k+1]+1)!$  lässt sich vereinfachen. Es gilt

## Der binomische Lehrsatz

$$(n - [k + 1])! (n - [k + 1] + 1) = (n - [k + 1] + 1)! = (n - k - 1 + 1)! = (n - k)!$$

$$(22) \quad (n - [k + 1])! \cdot (n - k) = (n - k)!$$

Erweitert man nun den zweiten Bruch in Gleichung (21) mit  $(n - k)$ , so wird aus dem Zähler  $(n - k) \cdot n!$  und im Nenner kann man nach Gleichung (22) statt  $(n - [k + 1])! \cdot (n - k)$  einfach  $(n - k)!$  schreiben. Aus Gleichung (21) wird also mit dieser Erweiterung

$$(23) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(n-k)! k!} + \frac{(n-k) \cdot n!}{(n-k)! \cdot (k+1)!}$$

Der in dieser Gleichung enthaltene Ausdruck  $(k + 1)!$  wird wiederum separat betrachtet. In diesem Produkt ist der letzte Faktor  $(k + 1)$  und der vorletzte aufgrund des Bildungsgesetzes einer Fakultät  $(k + 1 - 1) = k$ . Das Produkt mit  $k$  als letztem Faktor würde lauten  $k!$ . Multipliziert man dieses Produkt mit  $(k + 1)$ , erhält man wieder  $(k + 1)!$ . Es gilt also

$$(24) \quad (k + 1)! = k! \cdot (k + 1)$$

Dies in Gleichung (23) eingesetzt:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(n-k)! k!} + \frac{(n-k) \cdot n!}{(n-k)! \cdot k! \cdot (k+1)}$$

Die beiden Brüche werden auf einen Nenner gebracht und vereinfacht:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{(k+1) \cdot n! + (n-k) \cdot n!}{(n-k)! k! (k+1)} \\ &= \frac{k \cdot n! + n! + n \cdot n! - k \cdot n!}{(n-k)! \cdot k! \cdot (k+1)} \\ &= \frac{n! + n \cdot n!}{(n-k)! \cdot k! \cdot (k+1)} \\ &= \frac{n! \cdot (n+1)}{(n-k)! \cdot k! \cdot (k+1)} \end{aligned}$$

Für  $k! \cdot (k + 1)$  und  $n! \cdot (n + 1)$  in diesem Ausdruck wird entsprechend Gleichung (24) gesetzt  $(k + 1)!$  bzw.  $(n + 1)!$ , sodass

$$(25) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(n-k)! \cdot (k+1)!}$$

Nach Behauptung (20) soll nun gelten

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Die rechte Seite dieser zu beweisenden Gleichung wird explizit formuliert:

## Der binomische Lehrsatz

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1-[k+1])! \cdot (k+1)!}$$

$$(26) \quad \binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(n-k)! \cdot (k+1)!}$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (25) und (26) stimmen überein. Dann stimmen auch die linken Seiten überein und es gilt

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Das aber ist Gleichung (20), womit diese Behauptung bewiesen ist.