

Durchschnittliche Fallgeschwindigkeit und Endgeschwindigkeit

Hätte Galilei seine Fallversuche im luftleeren Raum durchgeführt und hätten ihm die heutigen Möglichkeiten der Zeitmessung zur Verfügung gestanden, wäre das sein Ergebnis gewesen:

Fallstrecke s [m]	Falldauer t [sec.]
10	1,42784312
20	2,01927511
30	2,47309683
40	2,85568625
50	3,19275428
60	3,49748708
70	3,77771781
80	4,03855022
90	4,28352937
100	4,51523641

Teilt man die von einem Körper zurückgelegte Strecke s durch die dafür benötigte Zeit t , dann erhält man die Geschwindigkeit v dieses Körpers während dieser Zeit:

$$(1) \quad v = \frac{s}{t}$$

Galilei hat also folgende Geschwindigkeiten gemessen:

v [m/sec.]
7,0035705
9,9045444
12,1305400
14,0071410
15,6604598
17,1551741
18,5297059
19,8090888
21,0107116
22,1472346

Dass ein Körper im freien Fall immer schneller wird, sieht man mit dem bloßen Auge. Aber welche Gesetzmäßigkeit steckt dahinter?

Diese Gesetzmäßigkeit findet man, wenn man die Fallgeschwindigkeit der Falldauer gegenüberstellt:

Durchschnittliche Fallgeschwindigkeit und Endgeschwindigkeit

v [m/sec.]	t [sec.]
7,0035705	1,42784312
9,9045444	2,01927511
12,1305400	2,47309683
14,0071410	2,85568625
15,6604598	3,19275428
17,1551741	3,49748708
18,5297059	3,77771781
19,8090888	4,03855022
21,0107116	4,28352937
22,1472346	4,51523641

Es zeigt sich nämlich, dass die Fallgeschwindigkeit, geteilt durch die Falldauer, stets denselben Wert ergibt:

s [m]	v [m/sec.]	t [sec.]	v/t [m/sec. ²]
10	7,0035705	1,42784312	4,905
20	9,9045444	2,01927511	4,905
30	12,1305400	2,47309683	4,905
40	14,0071410	2,85568625	4,905
50	15,6604598	3,19275428	4,905
60	17,1551741	3,49748708	4,905
70	18,5297059	3,77771781	4,905
80	19,8090888	4,03855022	4,905
90	21,0107116	4,28352937	4,905
100	22,1472346	4,51523641	4,905

Es gilt also, jedenfalls für dieses Experiment:

$$(2) \quad \frac{v}{t} = \text{const.} = 4,905$$

Wird diese Konstante mit b wie Beschleunigung bezeichnet und Gleichung (2) nach v umgestellt, ergibt sich für die Geschwindigkeit

$$(3) \quad v = b \cdot t$$

Damit hat Galilei ein Naturgesetz gefunden, das solange gilt, bis es durch ein Experiment widerlegt wird.

Welche Geschwindigkeit hat Galilei nun gemessen? Er hat ja nur die Fallhöhe durch die Falldauer geteilt und erhielt für jede Fallhöhe nur ein einziges Ergebnis, die durchschnittliche Fallgeschwindigkeit. Hätte der fallende Körper sich nur mit der Durchschnittsgeschwindigkeit bewegt, hätte er die gleiche Strecke zurückgelegt wie tatsächlich beim freien Fall. Die Funktion der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit wäre dann einfach eine Konstante, die sich für eine beliebige Falldauer t_0 folgendermaßen darstellen lässt:

Durchschnittliche Fallgeschwindigkeit und Endgeschwindigkeit

$$t := 0, 0.01 \dots 10$$

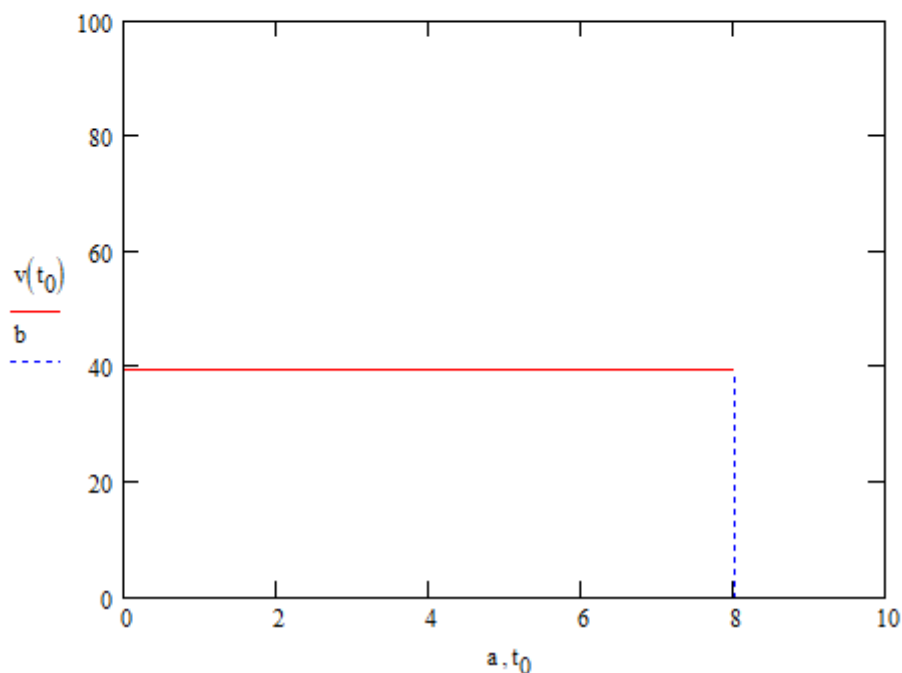
$$v(t) := 4.905 \cdot t$$

$$t_0 := 8$$

$$v(t_0) = 39.24$$

$$a := 0 \dots t_0$$

$$b := 0 \dots v(t_0)$$



Die Höhe des dargestellten Rechtecks ist die Geschwindigkeit $v(t_0)$, die bei einer Falldauer von t_0 im Durchschnitt erreicht wird, und die Breite des Rechtecks ist eben t_0 . Die Fläche des Rechtecks ist $v(t_0) \cdot t_0$, und dieses Produkt ist nach Gleichung (1) nichts anderes als die zurückgelegte Strecke $s(t_0)$.

Nun bewegt sich der fallende Körper gerade nicht mit gleichbleibender Geschwindigkeit, sondern beginnend bei null beschleunigt sich der Fall bis zu einer zu bestimmenden Endgeschwindigkeit. Da alle gemessenen Durchschnittsgeschwindigkeiten einer linearen Funktion folgen, ist dies auch für die Endgeschwindigkeit zu vermuten. Die Steigung dieser Funktion muss gerade so hoch sein, dass sich als Durchschnittsgeschwindigkeit $b \cdot t$ ergibt. Sei g diese Steigung, dann ist der Durchschnitt von Anfangs- und Endgeschwindigkeit

$$\frac{0 + g \cdot t}{2} = b \cdot t$$

Hieraus folgt ohne Weiteres

$$g = 2b$$

$$g = 9,81$$

Durchschnittliche Fallgeschwindigkeit und Endgeschwindigkeit

Die Steigung der Funktion der Endgeschwindigkeit ist also doppelt so hoch wie die Steigung der Funktion der Durchschnittsgeschwindigkeit. Die Konstante $g = 9,81$ ist die Gravitationskonstante, vielleicht zu Ehren Galileis als g bezeichnet.

Die Funktion der Endgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Falldauer ist also einfach

$$(4) \quad v = g \cdot t$$

Durchschnittsgeschwindigkeit und Endgeschwindigkeit für die beliebige Falldauer t_0 in einem Diagramm dargestellt:

$$t := 0, 0.01 \dots 10$$

$$v(t) := 9.81 \cdot t$$

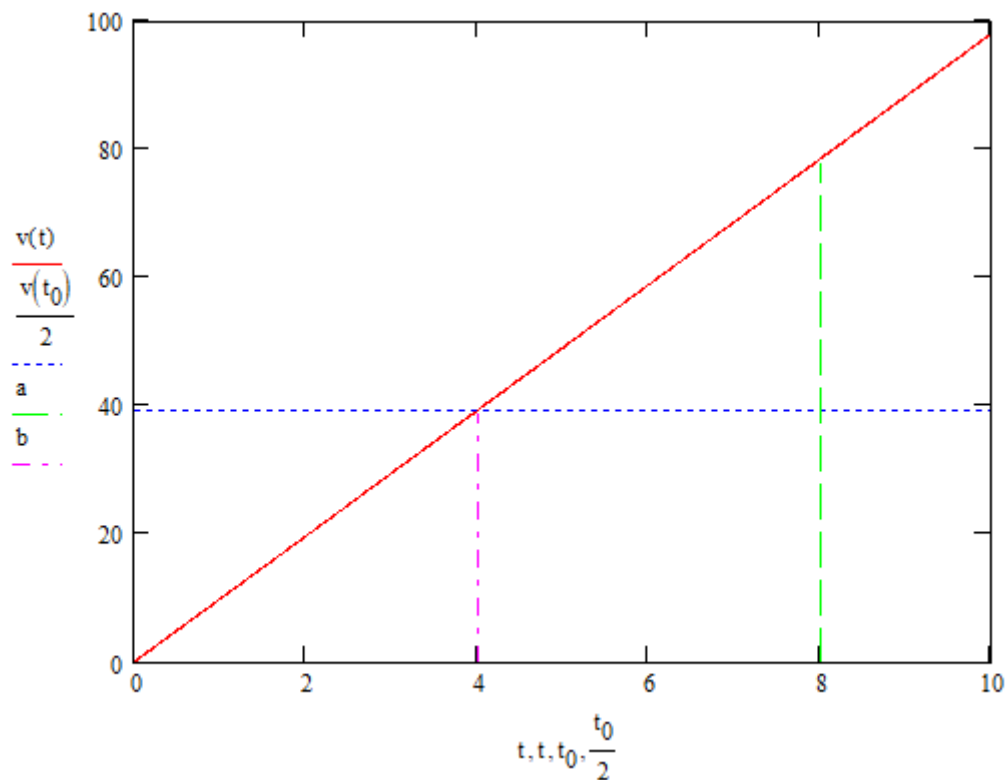
$$t_0 := 8$$

$$v(t_0) = 78.48$$

$$\frac{v(t_0)}{2} = 39.24$$

$$a := 0 \dots v(t_0)$$

$$b := 0 \dots \frac{v(t_0)}{2}$$



Durchschnittliche Fallgeschwindigkeit und Endgeschwindigkeit

Die Funktion der Endgeschwindigkeit schneidet die Funktion der Durchschnittsgeschwindigkeit genau in der Hälfte der Falldauer, und die Endgeschwindigkeit ist doppelt so hoch wie die Durchschnittsgeschwindigkeit – kein Wunder, wenn die Beschleunigung doppelt so hoch ist.

Die zurückgelegte Fallstrecke bei Durchschnittsgeschwindigkeit ergibt sich wieder als Fläche des gebildeten Rechtecks, hier konkret des Rechtecks $(0;0),(0;39,24),(8;39,24),(8;0) = 313,92$.

Es verwundert nicht, dass die Funktion der Endgeschwindigkeit bis zum Zeitpunkt t_0 die gleiche Fläche, also die gleiche im Fall zurückgelegte Strecke, einschließt: Die Fläche des Dreiecks $(0;0),(8;78,48),(8;0)$ ist ebenfalls 313,92.

Allgemein hat das Rechteck der Durchschnittsgeschwindigkeit die Höhe $\frac{g \cdot t_0}{2}$ und die Breite t_0 , das

heißt die Fläche ist $\frac{g \cdot t_0}{2} \cdot t_0 = \frac{g}{2} \cdot t_0^2$.

Die von der Funktion der Endgeschwindigkeit zwischen 0 und t_0 eingeschlossene Fläche ist genauso hoch, nämlich $\frac{g \cdot t_0 \cdot t_0}{2} = \frac{g}{2} \cdot t_0^2$. Dies spricht dafür, dass die Funktion der Endgeschwindigkeit richtig ist.

Es liegt nahe, statt die zurückgelegte Fallstrecke als Fläche in der Funktion $v(t)$ darzustellen, den funktionalen Zusammenhang $s(t)$ zu verwenden. Dazu muss nur Gleichung (1) nach s umgestellt werden:

$$s = v \cdot t$$

Hierin als Beispiel die Funktion der Durchschnittsgeschwindigkeit nach Gleichung (3) eingesetzt:

$$(5) \quad s(t) = b \cdot t^2$$

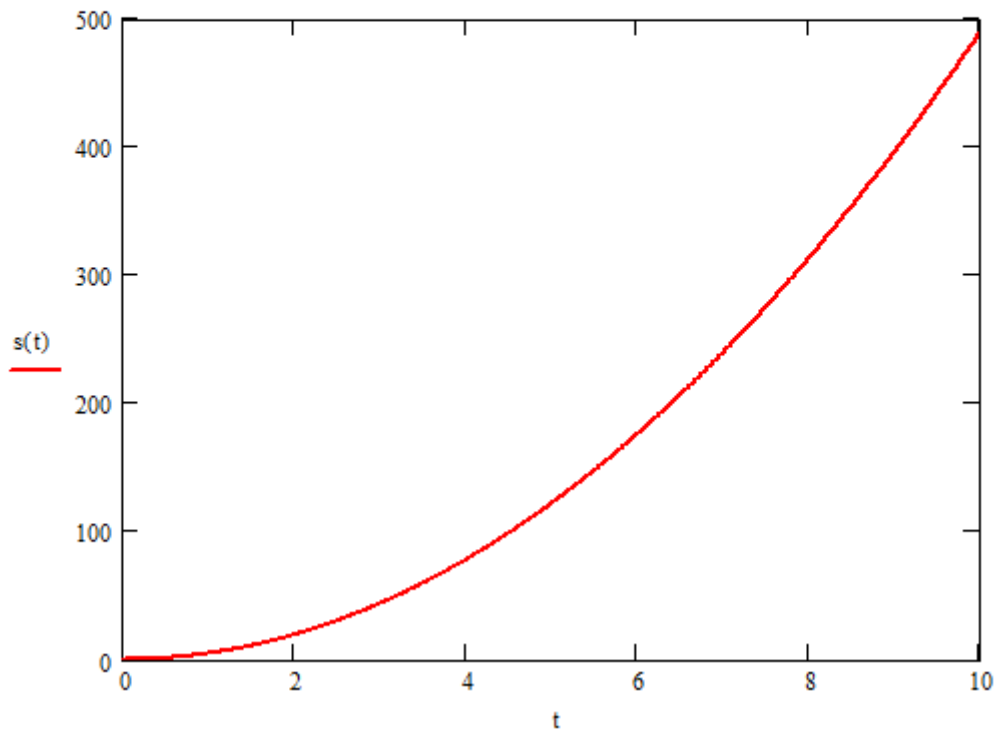
Das ist die Funktion einer Parabel:

Durchschnittliche Fallgeschwindigkeit und Endgeschwindigkeit

$$t := 0, 0.01 \dots 10$$

$$b := 4.905$$

$$s(t) := b \cdot t^2$$



Die Funktion der Fallstrecke in Abhängigkeit von der Falldauer kann dazu benutzt werden, um die durchschnittliche Fallgeschwindigkeit zwischen zwei beliebigen Zeitpunkten t_0 und t_1 zu bestimmen. Die zwischen dem Zeitpunkt t_0 und dem Zeitpunkt t_1 zurückgelegte Strecke ist $s(t_1) - s(t_0)$. Diese Differenz geteilt durch die Zeitdifferenz $t_1 - t_0$ ergibt *einen* Wert für die Geschwindigkeit in diesem Zeitraum, die Durchschnittsgeschwindigkeit:

$$(6) \quad v(t_1 - t_0) = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Um die Differenzen explizit in die Rechnung einzubeziehen, wird gesetzt

$$\Delta t = t_1 - t_0$$

$$\Delta s = s(t_1) - s(t_0)$$

$$\Delta v = v(t_1 - t_0)$$

sodass

$$(7) \quad \Delta v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

In der grafischen Darstellung ist diese Größe die Steigung einer Sekante durch die Punkte $[t_0, s(t_0)]$ und $[t_1, s(t_1)]$:

Durchschnittliche Fallgeschwindigkeit und Endgeschwindigkeit

$$t := 0, 0.01 \dots 10$$

$$b := 4.905$$

$$s(t) := b \cdot t^2$$

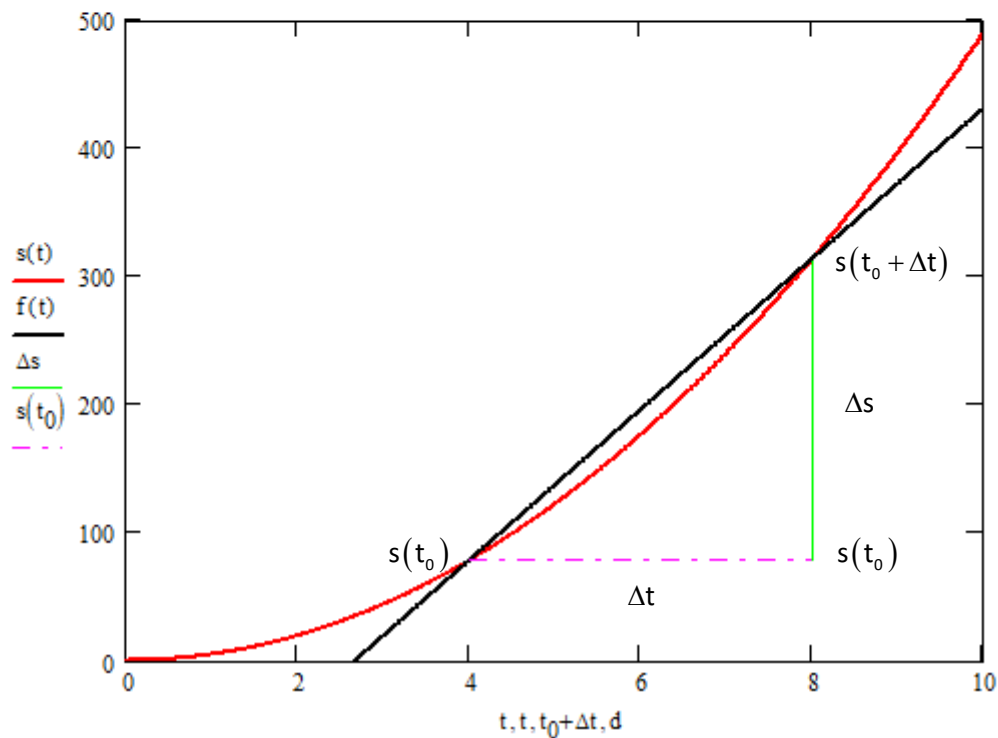
$$t_0 := 4$$

$$\Delta t := 4$$

$$f(t) := s(t_0) + \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} \cdot (t - t_0)$$

$$\Delta s := s(t_0) \dots s(t_0 + \Delta t)$$

$$d := t_0 \dots t_0 + \Delta t$$



Um die Verhältnisse möglichst genau beschreiben zu können, liegt es nahe, den Abstand zwischen t_0 und t_1 zu verkürzen, sodass der Abstand zwischen der Sekante und der Funktion $s(t)$ geringer wird. Zu diesem Zweck kann Δt mit einem beliebig kleinen Wert angesetzt werden, im Grenzfall mit null. Dann fallen die Punkte t_0 und t_1 in einem Punkt zusammen und die Sekante, die definitionsgemäß zwei Schnittpunkte mit der Funktion $s(t)$ hat, wird zur Tangente mit nur einem gemeinsamen Punkt, dem Berührungspunkt, in welchem die tangierte Funktion die gleiche Steigung hat wie eben die Tangente.

Zeichnerisch lässt sich dies ohne Weiteres darstellen. Das Lineal darf nur die Funktion nicht schneiden, muss sie aber berühren; das heißt einen, und nur einen, gemeinsamen Punkt mit ihr haben:

Durchschnittliche Fallgeschwindigkeit und Endgeschwindigkeit

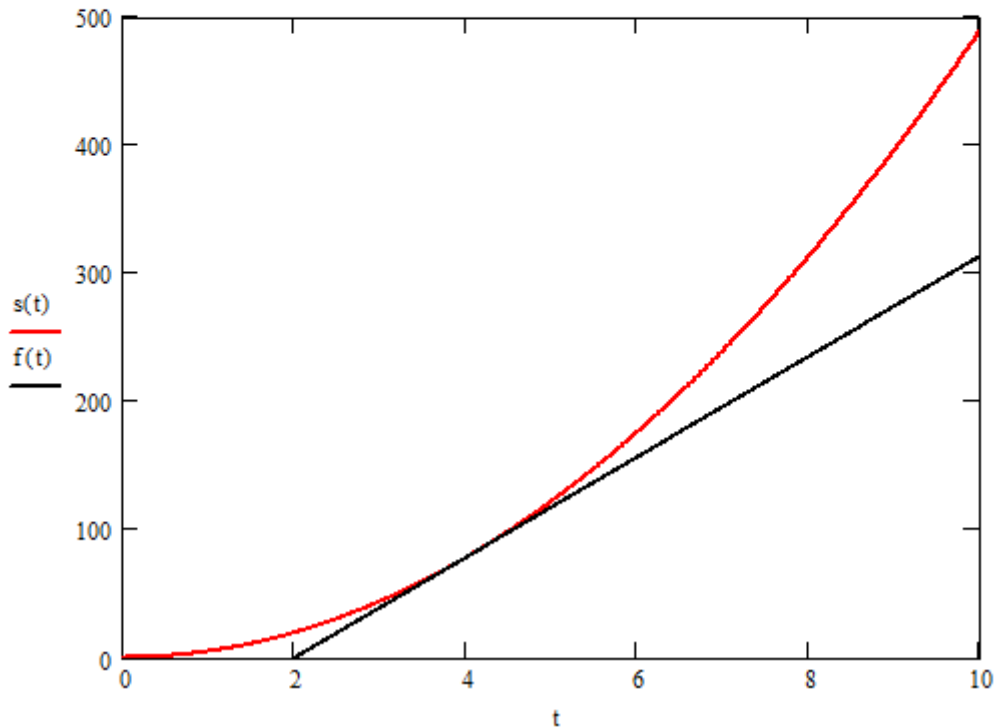
$$t := 0, 0.01 \dots 10$$

$$b := 4.905$$

$$s(t) := b \cdot t^2$$

$$t_0 := 4$$

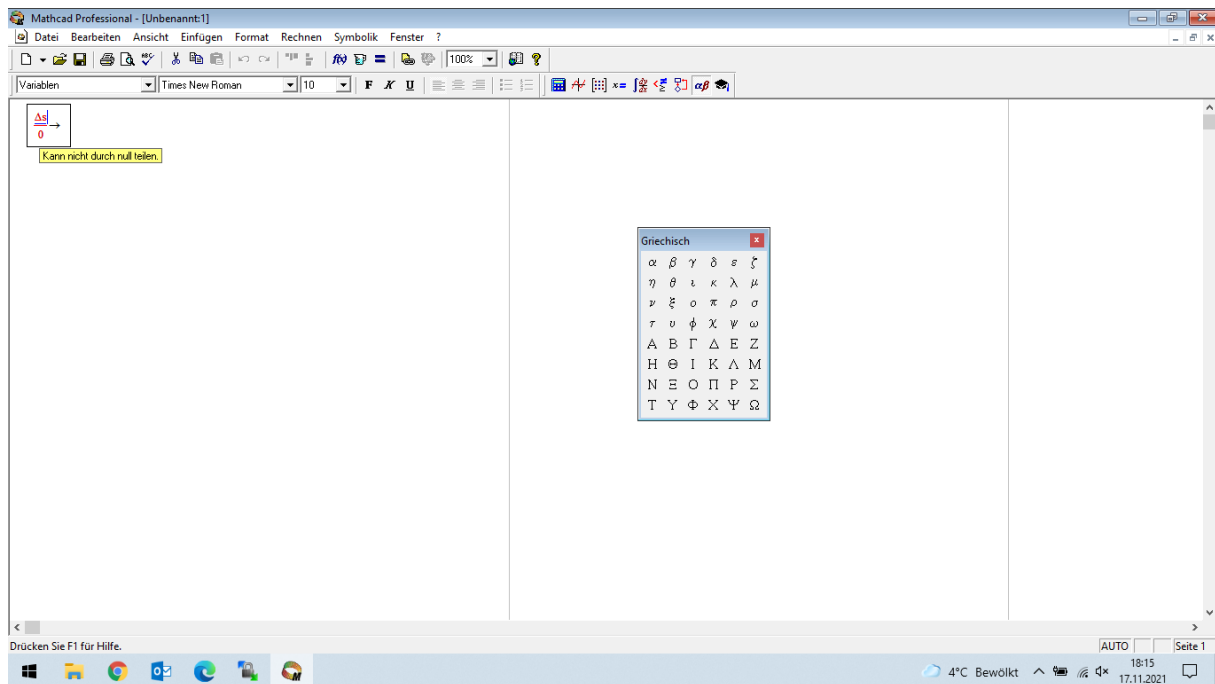
$$f(t) := s(t_0) + 2b \cdot t_0 \cdot (t - t_0)$$



Im Berührungspunkt haben die Tangente und die Funktion der Strecke $s(t)$ dieselbe Steigung. Während die Steigung einer Sekante die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen zwei Zeitpunkten angibt, kann es für einen einzigen Zeitpunkt keine Durchschnittsgeschwindigkeit geben. Wenn sich aber die beiden Zeitpunkte in einem einzigen vereinigen und die Sekante zur Tangente wird, muss die Steigung dieser Tangente auch eine Geschwindigkeit sein, eine Geschwindigkeit, die der fallende Körper genau und nur in diesem Zeitpunkt erreicht hat. Diese Geschwindigkeit kann man Momentangeschwindigkeit nennen. Die Momentangeschwindigkeit ist die in einem bestimmten Zeitpunkt, hier t_0 , erreichte Geschwindigkeit. Würde der fallende Körper sich mit der im Zeitpunkt t_0 erreichten Geschwindigkeit weiter bewegen, so wäre die Tangente zur Streckenfunktion geworden, deren Steigung die nunmehr gleichförmige Geschwindigkeit ist. Der fallende Körper beschleunigt sich aber weiter; die Momentangeschwindigkeit wird nur in einem Zeitpunkt erreicht, eben in t_0 .

Wie aber kann man diese Geschwindigkeit berechnen? Ein Zeitpunkt hat keine Ausdehnung, man müsste in Gleichung (7), der Funktion für die Geschwindigkeit zwischen zwei Zeitpunkten, für die Differenz zwischen den Zeitpunkten den Wert $\Delta t = 0$ einsetzen. Da hilft auch kein Mathematik-Programm:

Durchschnittliche Fallgeschwindigkeit und Endgeschwindigkeit



In einem Quotienten, der aus Differenzen besteht, einem Differenzenquotienten, darf der Nenner nicht gleich null gesetzt werden, weil ein Bruch mit einem Nenner von null nicht definiert ist.

Man kann aber den Bruch für beliebig kleine Werte des Nenners berechnen und untersuchen, ob sich der Wert des Bruches an einen konkreten Wert annähert. Das Ergebnis dieser Berechnung wird Differentialquotient genannt. Es wird definiert

$$(8) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Um den Grenzübergang durchzuführen, wird eine Formulierung von Δs gesucht, in der Δt vorkommt – in der Hoffnung, dass Δt nun im Zähler und Nenner vorkommt und sich dadurch irgendwie wegekürzt und trotzdem gleich null gesetzt werden kann. Die Strecke s ist ja eine Funktion von t ; und zieht man von der bei $t + \Delta t$ erreichten Strecke die bei t erreichte Strecke ab, so ist die Differenz die Erhöhung der Strecke durch Δt . Es gilt also $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$, in der Zeichnung dargestellt durch den beliebigen Wert $t = t_0$.

Allgemein gilt für irgendeinen Wert von t also

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Der Differentialquotient ist somit

$$(9) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Hierin die konkrete Funktion nach Gleichung (5) eingesetzt:

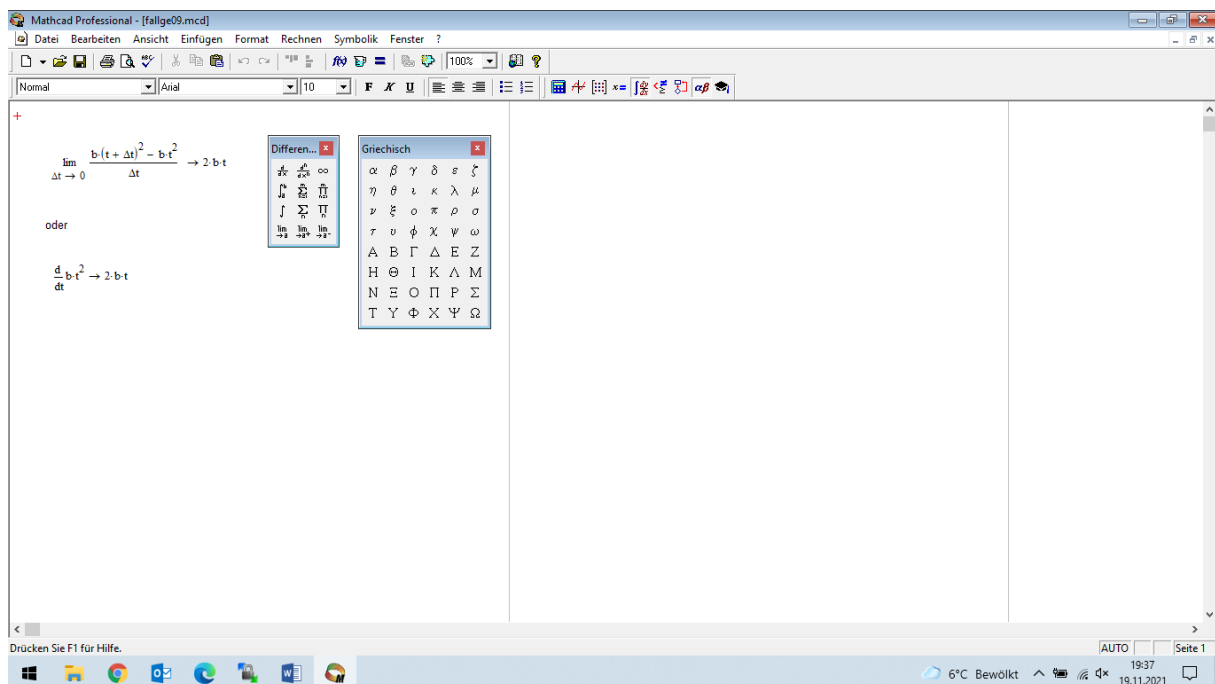
Durchschnittliche Fallgeschwindigkeit und Endgeschwindigkeit

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{b \cdot (t + \Delta t)^2 - b \cdot t^2}{\Delta t} \\ \frac{ds}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{b \cdot (t^2 + 2 \cdot t \cdot \Delta t + \Delta t^2) - b \cdot t^2}{\Delta t} \\ \frac{ds}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{b \cdot t^2 + 2 \cdot b \cdot t \cdot \Delta t + b \cdot \Delta t^2 - b \cdot t^2}{\Delta t} \\ \frac{ds}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \cdot b \cdot t \cdot \Delta t + b \cdot \Delta t^2}{\Delta t} \\ \frac{ds}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 2 \cdot b \cdot t + b \cdot \Delta t\end{aligned}$$

Nunmehr kann der Grenzübergang auf $\Delta t = 0$ durchgeführt werden:

$$(10) \quad \frac{ds}{dt} = 2 \cdot b \cdot t$$

Diese Funktion nennt man die erste Ableitung der ursprünglichen Funktion. Das kann auch das Mathematik-Programm:



Auf der rechten Seite von Gleichung (10) lässt sich $2b$ durch g ersetzen und man erhält $g \cdot t$. Das ist die Funktion der Geschwindigkeit nach Gleichung (4), sodass

$$\frac{ds}{dt} = g \cdot t = v$$

Mit Gleichung (4) wurde die Endgeschwindigkeit eines fallenden Körpers definiert, unter der Voraussetzung, dass der Fall im Zeitpunkt t beendet ist. Das muss er aber nicht sein. Die Funktion $v = g \cdot t$ gibt einfach die Momentangeschwindigkeit im Zeitpunkt t an.

Durchschnittliche Fallgeschwindigkeit und Endgeschwindigkeit

Es gilt also: Die erste Ableitung der Streckenfunktion in Abhängigkeit von der Zeit ist die Funktion der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit. Die Steigung der Streckenfunktion ist die Momentangeschwindigkeit.

Die Steigung der Funktion $v = g \cdot t$ hat sich mit $g = 9,81$ als Konstante erwiesen. Die Differentialbetrachtung sollte also als erste Ableitung einfach g ergeben.

Die abzuleitende Funktion lautet $v = g \cdot t$. Der Differenzenquotient ist

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

und der Differentialquotient

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Hierin die konkrete Funktion eingesetzt:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} &= \frac{g \cdot (t + \Delta t) - g \cdot t}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} &= \frac{g \cdot t + g \cdot \Delta t - g \cdot t}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} &= g = \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

$$(11) \quad \frac{dv}{dt} = g$$

Die erste Ableitung der momentanen Fallgeschwindigkeit ist die Beschleunigung, auf der Erde die Gravitationskonstante $g = 9,81$.

Damit ist das Instrumentarium geschaffen, den Versuch durch die Vorhersage zu ersetzen. Als Beispiel sei der Versuch mit der Fallhöhe 10 m betrachtet. Wie hoch ist die Falldauer? Gemessen wurden 1,428 Sekunden.

$s := 10$ Fallhöhe [m]

$b := 4.905$ Beschleunigung auf Durchschnittsgeschwindigkeit

$$s = b \cdot t^2 \text{ auflösen, } t \rightarrow \begin{pmatrix} -1.4278431229270644670 \\ 1.4278431229270644670 \end{pmatrix} \quad \text{Falldauer [sec.]}$$