Die Summierung einer geometrischen Reihe

Eine geometrische Reihe ist eine Summe, bei der das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Summanden konstant ist. Mit q für diesen Quotienten, s_n für die Summe, a_i für den Summanden i und dem Index $i = 0 \ldots n$ gilt für $n+1$ Summanden

(1) $$s_n = a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 \ldots + a_0 \cdot q^n$$

(2) $$a_i = a_0 \cdot q^i$$

(3) $$a_{i+1} = a_0 \cdot q^{i+1}$$

(4) $$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_0 \cdot q^{i+1}}{a_0 \cdot q^i} = q$$

(5) $$a_{i+1} = a_i \cdot q$$

Es versteht sich nach Gleichung (5), dass sich die geometrische Reihe auch konstruieren lässt, indem das erste Glied mit q multipliziert wird, das zweite Glied mit q und so weiter. So gesehen kann man q auch als konstituierenden Faktor der geometrischen Reihe bezeichnen.

Das Bildungsgesetz der geometrischen Reihe erlaubt eine Vereinfachung des Summenausdrucks. Hierzu wird die Summe nach Gleichung (1) explizit einschließlich des vorletzten Gliedes dargestellt:

(6) $$s_n = a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 \ldots + a_0 \cdot q^{n-1} + a_0 \cdot q^n$$

Die geometrische Reihe wird mit dem sie konstituierenden Faktor q multipliziert:

(7) $$s_n \cdot q = a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 \ldots + a_0 \cdot q^n + a_0 \cdot q^{n+1}$$

Man erkennt, dass das erste Glied der Reihe s_n durch das Bildungsgesetz der geometrischen Reihe zum zweiten Glied von s_n wird, aber durch die Multiplikation von s_n mit q auch zum ersten Glied der Reihe $s_n \cdot q$. Dieses ist damit gleich dem zweiten Glied der Reihe s_n, beide sind identisch.

Entsprechend wird das zweite Glied der Reihe s_n durch die Multiplikation mit q einerseits zum dritten Glied der Reihe s_n und andererseits zum zweiten Glied der Reihe $s_n \cdot q$, und so weiter.

Ab dem zweiten Glied der Reihe s_n sind alle Glieder von s_n auch in $s_n \cdot q$ enthalten. Nur das erste Glied von s_n hat keine Entsprechung in $s_n \cdot q$, da es ja mit q multipliziert werden muss und erst damit zum ersten Glied der Reihe $s_n \cdot q$ wird.

Das letzte Glied von s_n, $a_0 \cdot q^n$, wird durch die Multiplikation mit q zum letzten Glied der Reihe $s_n \cdot q$, $a_0 \cdot q^{n+1}$. Dieses Element ist zwar in der Reihe $s_n \cdot q$ enthalten, aber nicht in der Reihe s_n, da diese Reihe eben mit dem letzten Glied $a_0 \cdot q^n$ endet.

Mit anderen Worten: Die beiden Reihen gemäß Gleichungen (6) und (7) enthalten dieselben Elemente, mit der Ausnahme, dass das erste Glied der Reihe s_n nur in Gleichung (6) enthalten ist, und der Ausnahme, dass das letzte Glied der Reihe $s_n \cdot q$ nur in Gleichung (7) enthalten ist.

Bildet man nun die Differenz der beiden Reihen, so fallen alle Glieder weg, bis auf die beiden, die nur in einer der Reihen enthalten sind, das Glied a_0 der Reihe s_n und das Glied $a_0 \cdot q^{n+1}$ der Reihe $s_n \cdot q$.

Die Differenz der Gleichungen (6) und (7) ist also

$$s_n \cdot q - s_n = a_0 \cdot q^{n+1} - a_0$$

Hieraus folgt

$$s_n \cdot (q-1) = a_0 \cdot (q^{n+1} - 1)$$

(8) $$s_n = a_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \qquad \text{für } q \neq 1$$

Für $q = 1$ gilt die abgeleitete Summenformel nicht, da der Nenner zu null wird und damit der Ausdruck nicht definiert ist. Mit $q = 1$ degeneriert die geometrische Reihe zu einer Reihe, in der alle Glieder gleich groß sind. In diesem Fall ist die Summe der Reihe das Produkt aus dem Wert eines Elements mit der Anzahl der Elemente. Die Anzahl der mit *q* multiplizierten Glieder der geometrischen Reihe ist *n*; hinzu kommt das erste Element $a_0 \cdot q^0 = a_0$, sodass die Anzahl $n+1$ ist. Damit gilt für die Summe einer geometrischen Reihe im Fall $q = 1$:

(9) $$s_n = a_0 \cdot (n+1) \qquad \text{für } q = 1$$

Des Weiteren interessiert die Summenformel einer geometrischen Reihe, wenn die Anzahl ihrer Elemente gegen unendlich geht. Diese Summenformel ergibt sich als Grenzwert der Summenformel einer endlichen geometrischen Reihe gemäß Gleichung (8), wenn *n* gegen unendlich geht. Um den Grenzübergang durchzuführen, wird der Bruch in Gleichung (8) zunächst aufgeteilt:

(10) $$s_n = a_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = a_0 \cdot \frac{q^{n+1}}{q - 1} - a_0 \cdot \frac{1}{q - 1}$$

Wenn nun in diesem Ausdruck *q* zwischen 1 und -1 liegt, wenn also gilt $|q| < 1$, dann lässt sich *q* als Bruch darstellen, dessen Nenner 1 ist und dessen Zähler größer als 1:

$$q = \frac{1}{|\text{Zahl}| > 1}$$

Multipliziert man einen solchen Bruch mit sich selbst, so ergibt die Multiplikation des Zählers stets 1, der Nenner dagegen wird mit der Anzahl der Multiplikation immer größer und nähert sich an unendlich an, wenn die Anzahl der Multiplikationen gegen unendlich geht. Der Bruch geht damit gegen null. Es gilt also

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0 \qquad \text{für } |q| < 1$$

Für s_n gemäß Gleichung (10) ergibt der Grenzübergang also

(11) $$\lim_{n \to \infty} \left(a_0 \cdot \frac{q^{n+1}}{q - 1} - a_0 \cdot \frac{1}{q - 1} \right) = -a_0 \cdot \frac{1}{q - 1} \qquad \text{für } |q| < 1$$

Dies ist die Summenformel für eine unendliche geometrische Reihe unter der Bedingung, dass der Absolutwert des konstituierenden Faktors kleiner als 1 ist. Mit *s* für die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe und nach Ausklammern von -1 in Gleichung (11) lautet die endgültige Fassung der Summenformel einer unendlichen geometrischen Reihe

(12) $$s = \frac{a_0}{1 - q} \qquad \text{für } |q| < 1$$