Mathematische Handreichungen

1. Brüche multiplizieren

Ein Bruch ist ein Quotient:

$$a : b = \frac{a}{b}$$

Die Anzahl der Quotienten kann gezählt werden. Der Bruch $\frac{a}{b}$, mit c malgenommen, ergibt

$$c \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$$

Ein Bruch wird mit einer Zahl multipliziert, indem der Zähler mit der Zahl multipliziert wird. Man beachte bei der Schreibweise von Brüchen, dass

$$c \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$$

$$2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

aber

$$c\frac{a}{b} = c + \frac{a}{b}$$

$$2\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3}$$

Da gilt

$$\frac{a}{b} \cdot c = c \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$$

kann man auch sagen: Eine Zahl wird mit einem Bruch multipliziert, indem die Zahl mit dem Zähler multipliziert und durch den Nenner geteilt wird.

Ein Bruch wird durch eine Zahl geteilt, indem der Nenner mit dieser Zahl multipliziert wird:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$$

Durch die Rechenvorschrift a : b wird a in b Teile geteilt. Wenn dieser Quotient weiter in c Teile aufgeteilt werden soll, ergibt dies c Mal so viele Teile von a; die Anzahl der Teile von a erhöht sich von b auf b · c.

Die Zahl, mit der ein Bruch multipliziert wird, kann selbst ein Bruch sein. Was ergibt also

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}?$$

Da ein Bruch ein Quotient ist, kann man für diesen Ausdruck auch schreiben

$$\frac{a}{b} \cdot c : d$$

Wegen $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$ gilt auch

$$\frac{a}{b} \cdot c : d = \frac{a \cdot c}{b} : d$$

Ein Bruch wird durch eine Zahl geteilt, indem der Nenner mit der Zahl multipliziert wird. Damit gilt

$$\frac{a \cdot c}{b} : d = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Somit ist

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Brüche werden miteinander multipliziert, indem die Zähler miteinander multipliziert werden und die Nenner miteinander.

2. Bruch erweitern

Zähler und Nenner werden mit derselben Zahl multipliziert. Der Bruch $\frac{a}{b}$ wird mit c erweitert:

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c}$$

Da der ursprüngliche Bruch $\frac{a}{b}$ mit einem Bruch multipliziert wird, dessen Zähler und Nenner einander gleich sind, der also einen Wert von 1 aufweist, ändert sich der Wert des ursprünglichen Bruches dadurch nicht:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

3. Bruch kürzen

Zähler und Nenner werden durch dieselbe Zahl dividiert. Der Bruch $\frac{a}{b}$ wird durch c gekürzt:

$$\frac{a : c}{b : c} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\frac{a}{c} \cdot c}{\frac{b}{c} \cdot c} = \frac{a}{b}$$

Der mittlere, etwas längere Bruchstrich ist der Hauptbruchstrich. Dieser trennt Zähler und Nenner des zu ermittelnden Bruches. Der Wert des Bruches bleibt durch das Kürzen unverändert.

4. Bruch durch einen Bruch teilen

Teilt man den Bruch $\frac{a}{b}$ durch den Bruch $\frac{c}{d}$, erhält man einen neuen Bruch, bei dem $\frac{a}{b}$ im Zähler steht und $\frac{c}{d}$ im Nenner:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

Der wenig elegante Ausdruck mit drei Bruchstrichen besagt also, dass der Bruch $\frac{a}{b}$ durch den Bruch $\frac{c}{d}$ zu teilen ist, was ja auch erfolgen soll. Es sind also $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ getrennt zu berechnen und dann durcheinander zu teilen. Mit dem Taschenrechner oder in der Tabellenkalkulation würde man a/b und c/d in Klammern setzen und eingeben

(a/b)/(c/d)

Aber auch dieser Ausdruck sieht unelegant aus, was zwar dem Computer gleichgültig ist, jedoch nicht dem Mathematiker. Dieser versucht den Ausdruck zu vereinfachen.

Hierzu ist der Begriff des Kehrwerts nützlich. Der Kehrwert eines Bruchs ist ein Bruch, bei dem Zähler und Nenner vertauscht sind:

$$\text{Bruch} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

$$\text{Kehrwert} = \frac{\text{Nenner}}{\text{Zähler}}$$

Multipliziert man nun den Bruch mit seinem Kehrwert, erhält man

$$\text{Bruch} \cdot \text{Kehrwert} = \frac{\text{Zähler} \cdot \text{Nenner}}{\text{Nenner} \cdot \text{Zähler}} = 1$$

Betrachtet man mit dieser Erkenntnis den umzuformenden Ausdruck

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

dann lässt sich der Ausdruck unter dem Hauptbruchstrich zu einer 1 machen, wenn der Nenner mit dem Kehrwert des Nenners multipliziert wird. Multipliziert man aber nur den Nenner mit seinem Kehrwert, würde sich der Wert des ursprünglichen Bruchs verändern. Um dies zu vermeiden, wird auch der Zähler mit dem Kehrwert des Nenners multipliziert. Mit anderen Worten: Der Bruch wird mit dem Kehrwert des Nenners erweitert. Es ergibt sich

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Der neue Bruch ergibt sich also, indem der ursprüngliche Bruch mit dem Kehrwert des Nenners multipliziert wird.

Es muss nun nicht unbedingt ein Bruch sein, der durch einen anderen Bruch geteilt wird, sondern die Zahl, die geteilt wird, ist beliebig. Sei a diese Zahl und $\frac{b}{c}$ der Bruch, durch den zu teilen ist, so gilt

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \cdot \frac{c}{b}}{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}} = \frac{a \cdot \frac{c}{b}}{1} = a \cdot \frac{c}{b}$$

Soll also durch den Bruch $\frac{b}{c}$ geteilt werden, führt die Multiplikation mit dem Kehrwert $\frac{c}{b}$ zum gleichen Ergebnis. Durch einen Bruch wird geteilt, indem man mit dem Kehrwert des Bruches multipliziert.

5. Einen Bruch aufteilen, dessen Zähler aus einer Summe oder einer Differenz besteht

$$\frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$$

$$\frac{a-c}{b}=\frac{a}{b}-\frac{c}{b}$$

6. Brüche mit gleichem Nenner addieren

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}\neq\frac{a+c}{b+b}\text{, denn }\quad\frac{a+c}{b+b}=\frac{a}{b+b}+\frac{c}{b+b}\neq\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$$

7. Brüche mit ungleichem Nenner addieren

Wegen $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\neq\frac{a+c}{b+d}$ dürfen nicht einfach die Zähler und die Nenner der beiden Brüche addiert werden. Man kann Brüche nur addieren, wenn die Nenner übereinstimmen. Wenn das nicht der Fall ist, muss dieser Zustand hergestellt werden, indem die Brüche auf geeignete Weise erweitert werden. Der einfachste Weg ist, die Nenner der zu addierenden Brüche miteinander zu multiplizieren (man kann auch versuchen, ein kleineres gemeinsames Vielfaches zu finden; das Produkt der Nenner ist aber auf jeden Fall ein gemeinsames Vielfaches). Bei zwei Brüchen 1 und 2 ist der gemeinsame Nenner

$$\text{Nenner 1}\cdot\text{Nenner 2}$$

Bei n Brüchen 1...n ist der neue Nenner entsprechend

$$\text{Nenner 1}\cdot\text{Nenner 2}\ldots\cdot\text{Nenner n}$$

Mit diesem Produkt ist zunächst jeder der Brüche zu erweitern. Durch die Erweiterung ändert sich der Wert des einzelnen Bruches nicht, aber wegen des neuen Nenners können alle Brüche auf einen gemeinsamen Bruchstrich geschrieben werden, wie im Folgenden gezeigt wird.

Setzt man für Nenner das Symbol N und für Zähler das Symbol Z, so ergibt die Erweiterung bei zwei zu addierenden Brüchen

$$\frac{Z_1}{N_1}+\frac{Z_2}{N_2}=\frac{Z_1}{\color{red}{N_1}}\cdot\frac{\color{red}{N_1}\cdot N_2}{N_1\cdot N_2}+\frac{Z_2}{\color{red}{N_2}}\cdot\frac{N_1\cdot\color{red}{N_2}}{N_1\cdot N_2}$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung kann jeweils der Nenner des ursprünglichen Bruchs weggekürzt werden, da dieser Nenner im Zähler der Erweiterung vorhanden ist. Der bisherige Nenner ist aber auch im Nenner der Erweiterung vorhanden, sodass er insgesamt gesehen nicht wegfällt. Das darf er auch nicht, sonst hätte sich der Wert des Bruchs geändert. Die Brüche sehen also nun so aus:

$$\frac{Z_1\cdot N_2}{N_1\cdot N_2}+\frac{Z_2\cdot N_1}{N_1\cdot N_2}$$

Beide Brüche haben jetzt den gleichen Nenner und können auf einen gemeinsamen Bruchstrich geschrieben werden:

$$\frac{Z_1\cdot N_2+Z_2\cdot N_1}{N_1\cdot N_2}$$

Mathematisch korrekt wäre es jetzt, die Symbole alphabetisch zu sortieren. Darauf wird hier aber verzichtet, um den Zusammenhang zu den ursprünglichen Brüchen nicht aus dem Auge zu verlieren.

Für drei Brüche gilt entsprechend:

$$\frac{Z_1}{N_1}+\frac{Z_2}{N_2}+\frac{Z_3}{N_3}$$

$$=\frac{Z_1}{N_1}\cdot\frac{N_1\cdot N_2\cdot N_3}{N_1\cdot N_2\cdot N_3}+\frac{Z_2}{N_2}\cdot\frac{N_1\cdot N_2\cdot N_3}{N_1\cdot N_2\cdot N_3}+\frac{Z_3}{N_3}\cdot\frac{N_1\cdot N_2\cdot N_3}{N_1\cdot N_2\cdot N_3}$$

$$=\frac{Z_1\cdot N_2\cdot N_3}{N_1\cdot N_2\cdot N_3}+\frac{Z_2\cdot N_1\cdot N_3}{N_1\cdot N_2\cdot N_3}+\frac{Z_3\cdot N_1\cdot N_2}{N_1\cdot N_2\cdot N_3}$$

$$=\frac{Z_1\cdot N_2\cdot N_3+Z_2\cdot N_1\cdot N_3+Z_3\cdot N_1\cdot N_2}{N_1\cdot N_2\cdot N_3}$$

Bei n Brüchen ergibt sich:

$$\frac{Z_1}{N_1}+\frac{Z_2}{N_2}\ldots+\frac{Z_n}{N_n}$$

$$=\frac{Z_1}{N_1}\cdot\frac{N_1\cdot N_2\ldots\cdot N_n}{N_1\cdot N_2\ldots\cdot N_n}$$

$$+\frac{Z_2}{N_2}\cdot\frac{N_1\cdot N_2\ldots\cdot N_n}{N_1\cdot N_2\ldots\cdot N_n}$$

$$\vdots$$

$$+\frac{Z_n}{N_n}\cdot\frac{N_1\cdot N_2\ldots\cdot N_n}{N_1\cdot N_2\ldots\cdot N_n}$$

$$=\frac{Z_1\cdot N_2\cdot N_3\ldots\cdot N_n+Z_2\cdot N_1\cdot N_3\ldots\cdot N_n+Z_3\cdot N_1\cdot N_2\cdot N_4\ldots\cdot N_n\ldots+Z_n\cdot N_1\cdot N_2\ldots\cdot N_{n-1}}{N_1\cdot N_2\ldots N_n}$$

Mit anderen Symbolen:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c}{d}\cdot\frac{b\cdot d}{b\cdot d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{b\cdot d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b\cdot d\cdot f}{b\cdot d\cdot f}+\frac{c}{d}\cdot\frac{b\cdot d\cdot f}{b\cdot d\cdot f}+\frac{e}{f}\cdot\frac{b\cdot d\cdot f}{b\cdot d\cdot f}=\frac{a\cdot d\cdot f}{b\cdot d\cdot f}+\frac{c\cdot b\cdot f}{b\cdot d\cdot f}+\frac{e\cdot b\cdot d}{b\cdot d\cdot f}=\frac{a\cdot d\cdot f+c\cdot b\cdot f+e\cdot b\cdot d}{b\cdot d\cdot f}$$

Mit Zahlen:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3\cdot 7}{3\cdot 7}+\frac{4}{7}\cdot\frac{3\cdot 7}{3\cdot 7}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 7}+\frac{4\cdot 3}{3\cdot 7}=\frac{14}{21}+\frac{12}{21}=\frac{14+12}{21}=\frac{26}{21}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{7}+\frac{5}{8}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3\cdot 7\cdot 8}{3\cdot 7\cdot 8}+\frac{4}{7}\cdot\frac{3\cdot 7\cdot 8}{3\cdot 7\cdot 8}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3\cdot 7\cdot 8}{3\cdot 7\cdot 8}=\frac{2\cdot 7\cdot 8}{3\cdot 7\cdot 8}+\frac{4\cdot 3\cdot 8}{3\cdot 7\cdot 8}+\frac{5\cdot 3\cdot 7}{3\cdot 7\cdot 8}=\frac{2\cdot 7\cdot 8+4\cdot 3\cdot 8+5\cdot 3\cdot 7}{3\cdot 7\cdot 8}=\frac{313}{168}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 8}{2\cdot 4\cdot 8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 8}{2\cdot 4\cdot 8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 8}{2\cdot 4\cdot 8}=\frac{4\cdot 8+2\cdot 8+2\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 8}=\frac{4+2+1}{8}=\frac{7}{8}$$

8. Ausklammern

Wenn in einer Summe oder in einer Differenz in jedem Element derselbe multiplikative Faktor vorhanden ist, kann dieser ausgeklammert werden. Die in der Klammer verbleibenden Elemente werden dann insgesamt mit diesem Faktor multipliziert, wodurch man sich Rechenarbeit sparen kann oder gewünschte Elemente isoliert. Da die Rechenvorschrift, einen Faktor mit einer Klammer zu multiplizieren, sich aber auf jedes Element der Klammer bezieht, müssen die einzelnen Elemente beim Ausklammern durch das auszuklammernde Element geteilt werden.

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot \left(\frac{a \cdot b}{a} + \frac{a \cdot c}{a} \right) = a \cdot (b + c)$$

Ob das Ausklammern richtig war, lässt sich überprüfen, indem der ausgeklammerte Faktor wieder mit jedem Element der Klammer multipliziert wird:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

9. Rechnen mit Potenzen

Ein Produkt aus einer Zahl a, die n Mal mit sich selbst multipliziert wird, schreibt man als Potenz a^n.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren}} = a^n$$

Die Zahl a, die mit sich selbst multipliziert wird, heißt Grundzahl oder Basis, die hochgestellte Anzahl der Multiplikationen n ist der Exponent.

Bei der Berechnung zusammengesetzter Ausdrücke haben Klammern den absoluten Vorrang, das heißt, sie werden zuerst berechnet. Danach werden alle Potenzen berechnet, dann die Multiplikationen und Divisionen, als Letztes die Additionen und Subtraktionen (Klammerrechnung geht vor Potenzrechnung, Potenzrechnung geht vor Punktrechnung, Punktrechnung geht vor Strichrechnung). So gilt zum Beispiel

$$c \cdot (a + b)^2 = c \cdot (a + b) \cdot (a + b) = c \cdot (a^2 + 2ab + b^2) = a^2c + 2abc + b^2c$$

$$c^2 \cdot (a^2 + b^2) = a^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot c^2 = a \cdot a \cdot c \cdot c + b \cdot b \cdot c \cdot c$$

$$ab^n = a \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots \cdot b}_{\text{n Faktoren b}}$$

$$(ab)^n = \underbrace{a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \ldots \cdot a \cdot b}_{\text{n Faktoren ab}}$$

Potenzen zur gleichen Grundzahl werden miteinander multipliziert, indem man die Exponenten addiert, denn die Summe der Exponenten ist die neue Anzahl der insgesamt durchzuführenden Multiplikationen:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{\text{m Faktoren}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{\text{m+n Faktoren}} = a^{m+n}$$

$$a^3 \cdot a^4 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{\text{3 Faktoren}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{4 Faktoren}} = a^{3+4} = a^7$$

Teilt man zwei Potenzen durcheinander, schreibt man sie am besten als Bruch. Man erkennt, dass bei Potenzen zur gleichen Basis die kleinere Anzahl der Faktoren in der größeren enthalten ist, sodass man den Bruch um die kleinere Anzahl kürzen kann:

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a^{5-3} = a^2$$

Ist allgemein der Exponent im Zähler m und der Exponent im Nenner n mit m > n, dann gilt

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Es ist nun zu fragen, ob die abgeleitete Rechenregel „Zwei Potenzen mit gleicher Grundzahl werden durcheinander dividiert, indem man die Exponenten voneinander abzieht“ nur für den Fall gilt, dass der Exponent des Zählers größer ist als der Exponent des Nenners, oder ob die Regel allgemeingültig ist. Wenn dies der Fall ist, kann der Exponent des Ergebnisses auch kleiner als 2 sein, zum Beispiel gleich 1, gleich 0 oder sogar negativ – allesamt Exponenten, auf welche die Erklärung „Der Exponent einer Potenz ist die Anzahl der Multiplikationen der Basis mit sich selbst“ nicht mehr passt. Was soll man sich darunter vorstellen, dass eine Zahl -2 Mal mit sich selbst multipliziert wird? Wenn man aber die Bedingung fallen lässt, dass der Exponent des Zählers mindestens um 2 größer sein muss als der Exponent des Nenners, muss man einen Sinn in diesen Ergebnissen finden können.

Wird zunächst der Fall $m - n = 1$ betrachtet, so ist das Ergebnis der Division von a^m und a^n dann a^1, und es bleibt im Nenner ein a, die Grundzahl der Potenz. Am Beispiel von $m = 3$ und $n = 2$:

$$\frac{a^3}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^{3-2} = a^1 = a$$

Der Ausdruck a^1 kann folgendermaßen interpretiert werden: Die Anzahl der Faktoren, die miteinander multipliziert werden, ist 1. Dies ist kein Widerspruch, sondern es bedeutet, dass überhaupt keine Multiplikation durchgeführt wird.

Eine sinnvolle Interpretation gibt es auch für den Fall $m = n$. Dann ist die Anzahl der Faktoren, die miteinander multipliziert werden, im Zähler und Nenner gleich. Ein Bruch mit gleichem Zähler und Nenner hat den Wert 1, sodass a^0 den Wert 1 ergibt:

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

Wendet man die Rechenregel für das Dividieren von Potenzen auf den Fall m < n an, so erhält man, zunächst am Beispiel $m = 3$ und $n = 5$:

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$$

Es gilt aber auch

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2}$$

sodass

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

Für die Division von a^m und a^n mit m < n ergibt sich

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad [m - n < 0]$$

Kürzt man diesen Bruch durch a^m, so erhält man

$$\frac{a^m : a^m}{a^n : a^m} = \frac{1}{a^{n-m}} \qquad [n - m > 0]$$

Allgemein gilt für eine Basis a mit einem negativen Exponenten n

$$a^{-n} = \frac{a^{-n} \cdot a^n}{a^n} = \frac{a^{n-n}}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

a^{-n} ist also nichts weiter als der Kehrwert von a^n.

Der Weg von einem negativen Exponenten im Zähler zu einem positiven Exponenten im Nenner an einem Zahlenbeispiel:

$$10^{-2} = \frac{10^{-2}}{1} = \frac{10^{-2}}{1} \cdot \frac{10^2}{10^2} = \frac{10^{-2+2}}{10^2} = \frac{10^0}{10^2} = \frac{1}{10^2}$$

Der Weg von einem positiven Exponenten im Nenner zu einem negativen Exponenten im Zähler an einem Zahlenbeispiel:

$$\frac{1}{10^2} = \frac{1}{10^2} \cdot \frac{10^2}{10^2} = \frac{10^2}{10^{2+2}} = \frac{10^2}{10^4} = 10^{2-4} = 10^{-2}$$

Eine Potenz kann auch selbst die Grundzahl einer Potenz sein, das heißt, sie kann wiederum mit sich selbst multipliziert werden. Zum Beispiel ist

$$\left(a^n\right)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot a^n \ldots \cdot a^n}_{\text{m Faktoren}}$$

In jedem der m Faktoren wird der Faktor a n Mal mit sich selbst multipliziert, insgesamt also $m \cdot n$ Mal. Somit ergibt sich die Potenz einer Potenz, indem die Exponenten miteinander multipliziert werden. Es gilt also

$$\left(a^n\right)^m = a^{m \cdot n}$$

10. Rechnen mit Wurzeln

Die n. Wurzel aus einer Zahl a ist eine Zahl, die n Mal mit sich selbst multipliziert a ergibt. Man schreibt $\sqrt[n]{a}$. Für $n = 2$ kann man im Wurzelzeichen die 2 weglassen und schreibt $\sqrt{a}$, die Quadratwurzel von a. Es gilt

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

Andererseits folgt aus den Rechenregeln für Potenzen

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{1+1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a$$

Da sowohl $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ als auch $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a$, ist

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$$

Dieser Ausdruck lässt sich als Potenz schreiben:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

Hieraus die Quadratwurzel gezogen:

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

Die Erkenntnis, dass $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ ist, kann nützlich sein für das Wurzelziehen mithilfe eines Taschenrechners oder mit der Tabellenkalkulation. Statt die Wurzelfunktion zu suchen, kann man im Taschenrechner einfach $a^{.5}$ eingeben und in Excel kann man statt der Formel WURZEL(Zahl) die Formel (Zahl)^0,5 oder (Zahl)^(1/2) benutzen. (Wenn der Exponent ein Zellbezug ist, empfiehlt es sich, diesen in Klammern zu setzen.)

Tatsächlich lässt sich jede Wurzel in die Exponentialschreibweise überführen. So gilt für die dritte Wurzel entsprechend der obigen Ableitung

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a$$

$$a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a^1 = a$$

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$$

Für die n. Wurzel aus a gilt

$$\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{\text{n Faktoren}} = a$$

$$\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \ldots \cdot a^{\frac{1}{n}}}_{\text{n Faktoren}} = a^{n \cdot \frac{1}{n}} = a$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{\text{n Faktoren}} = \underbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \ldots \cdot a^{\frac{1}{n}}}_{\text{n Faktoren}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Der Exponent $\frac{1}{2}$ zur Basis a bedeutet also die Quadratwurzel von a, der Exponent $\frac{1}{3}$ die dritte Wurzel und der Exponent $\frac{1}{n}$ die n. Wurzel.

Man kann nun fragen, ob es auch eine sinnvolle Interpretation für Brüche als Exponenten gibt, die einen anderen Zähler haben als 1, also etwa $\frac{2}{3}$ oder allgemein $\frac{m}{n}$. Multipliziert man also $a^{\frac{2}{3}}$ drei Mal mit sich selbst, so erhält man

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$$

Andererseits gilt auch

$$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^2$$

sodass

$$\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}$$

$$\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^3 = \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$$

Allgemein gilt

$$\underbrace{a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{m}{n}}\ldots\cdot a^{\frac{m}{n}}}_{\text{n Faktoren}} = a^{\frac{n\cdot m}{n}} = a^m$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^m}\ldots\cdot\sqrt[n]{a^m}}_{\text{n Faktoren}} = a^m$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^m}\ldots\cdot\sqrt[n]{a^m}}_{\text{n Faktoren}} = \underbrace{a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{m}{n}}\ldots\cdot a^{\frac{m}{n}}}_{\text{n Faktoren}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$$

Mit diesem Zusammenhang ist eine weitere Rechenregel für Potenzen abgeleitet: Aus einer Potenz wird die n. Wurzel gezogen, indem man den Exponenten durch n teilt.

Zusammenfassend ergeben sich somit folgende Rechenregeln für Potenzen:

- Potenzen mit gleicher Basis werden miteinander multipliziert, indem die Exponenten addiert werden.
- Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden durcheinander dividiert, indem die Exponenten voneinander abgezogen werden.
- Potenzen mit gleicher Basis werden potenziert, indem die Exponenten miteinander multipliziert werden.
- Aus einer Potenz wird die n. Wurzel gezogen, indem der Exponent durch n geteilt wird.

11. Logarithmen

Der Logarithmus einer Zahl ist der Exponent, mit dem die Basis des Logarithmus potenziert werden muss, um diese Zahl zu erhalten. Bei einem Logarithmus zur Basis 10 (dekadischer Logarithmus) gilt für die Zahl a:

$$10^{\log a} = a$$

Für Zahlen, die sich als 10er-Potenz mit einem ganzzahligen Exponenten darstellen lassen, sind die Logarithmen leicht zu ermitteln. So gilt beispielsweise

$$10^2 = 100$$

Man muss also 10 mit 2 potenzieren, um 100 zu erhalten. Das ist aber die Definition des Logarithmus von 100:

$$10^{\log 100} = 100$$

Wenn also 10 mit 2 potenziert werden muss, um 100 zu erhalten, und andererseits 10 mit log 100 potenziert ebenfalls 100 ergibt, dann sind 2 und log 100 identisch. Es gilt somit

$$\log 100 = 2$$

Entsprechend ergibt sich

$$10^3 = 1000$$

$$10^{\log 1000} = 1000$$

$$\log 1000 = 3$$

Nach den Rechenregeln für Potenzen gilt aber auch

$$10^0 = 1$$

$$10^{\log 1} = 1$$

$$\log 1 = 0$$

sowie

$$10^1 = 10$$

$$10^{\log 10} = 10$$

$$\log 10 = 1$$

Neben den dekadischen Logarithmen zur Basis 10 sind die natürlichen Logarithmen verbreitet, die als Basis die Eulersche Konstante e haben. Für e gilt

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}71828182845905\ldots$$

Zur Unterscheidung von den dekadischen Logarithmen schreibt man ln (logarithmus naturalis). Es gilt

$$e^0 = 1$$

$$e^{\ln 1} = 1$$

$$\ln 1 = 0$$

$$e^1 = e$$

$$e^{\ln e} = e$$

$$\ln e = 1$$

Wenn man sich erst an den Gedanken gewöhnt hat, dass der Logarithmus nichts anderes als der Exponent einer gegebenen Grundzahl ist, mag man die Logarithmen vielleicht nicht mehr ganz so verwirrend finden.

12. Gleichungen lösen

Eine Gleichung ist die Gleichsetzung von mathematischen Ausdrücken. Mit Gleichungen werden häufig Zusammenhänge zwischen verschiedenen Größen definiert. Solche Gleichungen nennt man Bestimmungsgleichungen. Eine Bestimmungsgleichung wird nur für bestimmte Werte ihrer Elemente erfüllt, das heißt die Gleichheit bleibt nur gewahrt, wenn die Elemente bestimmte Werte annehmen. Die Lösung einer Gleichung besteht darin, den Wert derjenigen interessierenden Elemente zu finden, welche die Gleichung erfüllen. Dies wird erreicht, indem man geeignete Umformungen der Gleichung vornimmt, sodass die Gleichheit der Ausdrücke links und rechts vom Gleichheitszeichen erhalten bleibt. Nicht alle Gleichungen sind lösbar, und nicht alle Lösungen interessieren. Meistens sucht man nur nach einer positiven reellen Lösung.

Grundsätzlich kann man mit einer Gleichung beliebige Umformungen durchführen, wenn man dies nur auf beiden Seiten der Gleichung macht. Ob die Umformungen zu einer Lösung führen, ist eine zweite Frage. Findet man keine Lösung, kann man versuchen, einen anderen Lösungsweg einzuschlagen. Bevor man eine Gleichung als unlösbar einstuft, sollte man versuchen, seinen Blick für andere Lösungswege zu schärfen.

Das Vorgehen sei zunächst an einem einfachen Beispiel erläutert. Die Aufgabe bestehe darin, die Gleichung $3x = 12$ nach x aufzulösen. Dass hier $x = 4$ gilt, sagt einem die Intuition, aber mathematisch gesehen, muss man die gegebene Gleichung so umformen, dass auf der linken Seite der Gleichung nicht 3x steht, sondern nur x. Wenn man sich ganz unbefangen fragt, wie 3x in 1x zu verwandeln ist, dann kann man natürlich darauf kommen, dass man einfach 2x abzieht, denn $3x – 2x = x$. Führt man aber diese Umformung an der Gleichung durch, sieht man, dass man keinen Schritt auf die Lösung zu gemacht hat, sondern von ihr weg:

$$3x = 12 \quad | -2x$$

$$3x - 2x = 12 - 2x$$

$$x = 12 - 2x$$

Das war also ein Irrweg. Zweckmäßiger ist es, die gegebene Gleichung durch 3 zu teilen (die durchzuführende mathematische Operation steht hinter dem senkrechten Strich rechts von der Gleichung):

$$3x = 12 \quad | :3$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$

$$x = 4$$

Man vermeide die Ausdrucksweise „Wir bringen die 3 auf die andere Seite“. Wenn die Gleichungen etwas komplizierter sind, führt das nur zur Verwirrung. Es ist besser, sich immer wieder klar zu machen, was man auf *beiden* Seiten der Gleichung tun muss, um das gewünschte Element zu isolieren.

Gegeben sei folgende Gleichung, die nach BW aufzulösen ist:

$$BW - BW \cdot \frac{1}{1+i} = \frac{A}{1+i} - \frac{A}{(1+i)^{n+1}}$$

Bei Gleichungen, die Brüche mit unterschiedlichem Nenner enthalten, empfiehlt es sich, die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen. Auf der linken Seite ist der gemeinsame Nenner 1 + i, sodass BW mit 1 + i zu erweitern ist. Auf der rechten Seite ist im Nenner $(1 + i)^{n+1}$ der Ausdruck 1 + i bereits enthalten, sodass der Bruch $\frac{A}{1+i}$ nur noch mit $\frac{(1+i)^{n+1}}{1+i} = (1+i)^n$ zu erweitern ist. Man erhält

$$\frac{BW \cdot (1+i) - BW}{1+i} = \frac{A \cdot (1+i)^n - A}{(1+i)^{n+1}}$$

Wer nicht von der Richtigkeit dieser Umformung überzeugt ist, möge die Brüche wieder auflösen und kürzen und er wird wieder die ursprüngliche Gleichung erhalten. Das tun wir jetzt aber nicht, sondern wir klammern auf der linken Seite BW aus und auf der rechten Seite A:

$$BW \cdot \frac{1+i-1}{1+i} = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n+1}}$$

Auf der linken Seite hebt sich 1 – 1 zu 0 auf:

$$BW \cdot \frac{i}{1+i} = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n+1}}$$

Wenn man nun beide Seiten der Gleichung mit 1 + i multipliziert, erhält man

$$BW \cdot \frac{i}{1+i} = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n+1}} \quad | \cdot (1+i)$$

$$BW \cdot \frac{i \cdot (1+i)}{1+i} = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n+1}} \cdot (1+i)$$

$$BW \cdot i = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}$$

Um BW zu isolieren, muss nur noch durch i geteilt werden:

$$BW \cdot i = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n} \quad | : i$$

$$BW = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$$

Damit ist das Problem gelöst; weitere Umformungen führen nicht zu einer Vereinfachung des Ausdrucks auf der rechten Seite der Gleichung.

Gegeben sei folgende Gleichung:

$$A_0 = \frac{E}{1+r} + \frac{E}{(1+r)^2} + \frac{E}{(1+r)^3} \ldots + \frac{E}{(1+r)^n} + \frac{A_0}{(1+r)^n}$$

Die Exponenten von (1 + r) nehmen alle ganzzahligen Werte von 1 bis n an, wobei n eine positive ganze Zahl ist. Zu bestimmen ist r.

Einen Ansatzpunkt zur Lösung findet man in der Struktur der rechten Seite dieser Gleichung. Man erkennt, dass alle Brüche, die E im Zähler enthalten, einem Bildungsgesetz unterliegen: Ein Element dieser Reihe ergibt sich aus dem vorhergehenden, indem das vorhergehende Element mit einem konstanten Faktor multipliziert wird. Dies ist das Bildungsgesetz einer geometrischen Reihe.

In diesem Fall ist der Faktor $\frac{1}{1+r}$. Multipliziert man nun die geometrische Reihe mit dem sie konstituierenden Faktor, so wird aus dem Element $\frac{E}{1+r}$ das Element $\frac{E}{(1+r)^2}$, aus $\frac{E}{(1+r)^2}$ der ursprünglichen Reihe wird $\frac{E}{(1+r)^3}$ in der neuen Reihe; schließlich wird aus $\frac{E}{(1+r)^{n-1}}$ das Element $\frac{E}{(1+r)^n}$. In der ursprünglichen Reihe und in der neuen Reihe sind somit die Elemente $\frac{E}{(1+r)^2}$ bis

$\frac{E}{(1+r)^n}$ identisch. Wenn man die Differenz der beiden Reihen bildet, fallen diese Elemente weg, und man kann die weiteren Berechnungen auf die verbleibenden Elemente der beiden Reihen beschränken. Dies wird im Folgenden durchgeführt.

$$A_0 = \frac{E}{1+r} + \frac{E}{(1+r)^2} + \frac{E}{(1+r)^3} \ldots + \frac{E}{(1+r)^n} + \frac{A_0}{(1+r)^n} \quad | \cdot \frac{1}{1+r}$$

$$A_0 \cdot \frac{1}{1+r} = \frac{E}{(1+r)^2} + \frac{E}{(1+r)^3} \ldots + \frac{E}{(1+r)^n} + \frac{E}{(1+r)^{n+1}} + \frac{A_0}{(1+r)^{n+1}}$$

Die Differenz der beiden Gleichungen ist

$$A_0 - A_0 \cdot \frac{1}{1+r} = \frac{E}{1+r} - \frac{E}{(1+r)^{n+1}} + \frac{A_0}{(1+r)^n} - \frac{A_0}{(1+r)^{n+1}}$$

An dieser Gleichung lassen sich einige Umformungen vornehmen:

$$A_0 \cdot \frac{1+r-1}{1+r} = E \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^{n+1}} + A_0 \cdot \frac{1+r-1}{(1+r)^{n+1}}$$

$$A_0 \cdot \frac{r}{1+r} = E \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^{n+1}} + A_0 \cdot \frac{r}{(1+r)^{n+1}}$$

$$A_0 \cdot r = E \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n} + A_0 \cdot \frac{r}{(1+r)^n}$$

$$A_0 \cdot r - A_0 \cdot \frac{r}{(1+r)^n} = E \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}$$

$$A_0 \cdot r \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n} = E \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}$$

$$A_0 \cdot r = E$$

$$r = \frac{E}{A_0}$$

Gegeben sei folgende Gleichung, die nach K_0 aufzulösen ist:

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t$$

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t \; | : (1+i)^t$$

$$K_0 = \frac{K_t}{(1+i)^t}$$

Gegeben sei folgende Gleichung, die nach i aufzulösen ist:

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t$$

Das Umstellen der Gleichung führt zunächst zu

$$(1+i)^t = \frac{K_t}{K_0}$$

Da i in der Basis einer Potenz vorkommt, lässt sich i nicht ohne Weiteres isolieren. Um die Potenz aufzulösen, kann man jedoch die t. Wurzel aus der Gleichung ziehen:

$$1+i = \sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}}$$

$$i = \sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1$$

$$i = \left(\frac{K_t}{K_0}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$$

Gegeben sei folgende Gleichung, die nach t aufzulösen ist:

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t$$

Die Gleichung wird zunächst so umgestellt, dass die gesuchte Variable möglichst isoliert auf der linken Seite steht:

$$(1+i)^t = \frac{K_t}{K_0}$$

Durch Wurzelziehen lässt sich diese Gleichung nicht nach t auflösen. Man sieht aber, dass die Variable t ein Exponent ist; und die Frage „Welchen Wert hat der Exponent?“ ähnelt der Frage „Welchen Wert hat der Logarithmus?“. Profis sagen: „Die Gleichung lösen wir durch Logarithmieren.“ Nicht-Profis wenden die allgemeine Definition eines Logarithmus

$$10^{\log a} = a \text{ oder } e^{\ln a} = a$$

auf beide Seiten der Gleichung an, das heißt, statt a werden die Variablen in die Definition des Logarithmus eingesetzt. Unter Verwendung des dekadischen Logarithmus gilt

$$10^{\log(1+i)} = 1+i$$

$$10^{\log K_t} = K_t$$

$$10^{\log K_0} = K_0$$

Diese Gleichungen in die zu lösende Gleichung eingesetzt:

$$\left[10^{\log(1+i)}\right]^t = \frac{10^{\log K_t}}{10^{\log K_0}}$$

In der Gleichung stehen jetzt also nur noch 10er-Potenzen. Auf der linken Seite ist $10^{\log(1+i)}$ mit t zu potenzieren. Nach den Rechenregeln für Potenzen tut man dies, indem man die Exponenten miteinander multipliziert. Die linke Seite der Gleichung lässt sich also folgendermaßen umformen:

$$\left[10^{\log(1+i)}\right]^t \rightarrow 10^{t \cdot \log(1+i)}$$

Auf der linken Seite sind zwei Potenzen mit der gleichen Grundzahl durcheinander zu teilen. Hierzu werden die Exponenten voneinander subtrahiert:

$$\frac{10^{\log K_t}}{10^{\log K_0}} \rightarrow 10^{\log K_t - \log K_0}$$

Beide Seiten wieder zu einer Gleichung vereinigt:

$$10^{t \cdot \log(1+i)} = 10^{\log K_t - \log K_0}$$

Damit stehen sich zwei Potenzen gegenüber, die einander gleich sind. Die Potenzen haben die gleiche Grundzahl und müssen denselben Wert ergeben. Dies ist nur möglich, wenn auch die Exponenten einander gleich sind. Deswegen gilt

$$t \cdot \log(1+i) = \log K_t - \log K_0$$

Hieraus folgt ohne Weiteres

$$t = \frac{\log K_t - \log K_0}{\log(1+i)}$$

Die Profi-Lösung des Problems, die Gleichung

$$(1+i)^t = \frac{K_t}{K_0}$$

nach t aufzulösen, verzichtet darauf, die Definition des Logarithmus der einzelnen Variablen in die Gleichung einsetzen, sondern setzt unmittelbar den Logarithmus des ganzen mathematischen Ausdrucks auf der linken und der rechten Seite ein.

Im vorliegenden Fall steht auf der linken Seite der Gleichung eine Potenz mit der Basis 1 + i. Um diese Basis mit t zu potenzieren, muss man den Logarithmus der Basis mit t multiplizieren, also

$$\log\left[(1+i)^t\right] = t \cdot \log(1+i)$$

Den Logarithmus des Quotienten $\frac{K_t}{K_0}$ erhält man, indem den Logarithmus des Nenners vom Logarithmus des Zählers abzieht:

$$\log \frac{K_t}{K_0} = \log K_t - \log K_0$$

Die Logarithmierung der zu lösenden Gleichung ergibt also wieder $t \cdot \log(1+i) = \log K_t - \log K_0$, woraus sich t unmittelbar ableiten lässt.

Für die Logarithmierung muss man nun keineswegs die dekadischen Logarithmen verwenden. Mit den natürlichen Logarithmen ergibt sich beispielsweise

$$(1+i)^t = \frac{K_t}{K_0}$$

$$\ln\left[(1+i)^t\right] = t \cdot \ln(1+i)$$

$$\ln \frac{K_t}{K_0} = \ln K_t - \ln K_0$$

$$t \cdot \ln(1+i) = \ln K_t - \ln K_0$$

$$t = \frac{\ln K_t - \ln K_0}{\ln(1+i)}$$

Gegeben sei folgende Gleichung, die nach x aufzulösen ist:

$$2x - 12 - \frac{98}{x^2} = 0$$

Die Gleichung ist nicht so harmlos, wie sie aussieht. Wenn man sie mit x^2 multipliziert, erkennt man, dass x in der dritten Potenz vorkommt:

$$2x^3 - 12x^2 - 98 = 0$$

Das heißt, es handelt sich um eine Gleichung dritten Grades, die drei Lösungen hat. Die reelle Lösung $x = 7$ findet man am einfachsten durch Probieren. Es gilt

$$2 \cdot 7^3 - 12 \cdot 7^2 - 98 = 0$$

Zwar gibt es professionellere Lösungsmöglichkeiten; als Mathematik-Anwender sollte man sich aber im Zeitalter der Informationstechnologie nicht mit der Entwicklung von Algorithmen für die Lösung nicht-linearer Gleichungen befassen, sondern hierfür die Zielwertsuche und den Solver von Excel oder die Funktionen von Mathcad verwenden.

13. Funktionen

Eine Funktion ist eine gegenseitige Zuordnung von Elementen verschiedener Mengen. Die Zuordnung wird durch das Gleichheitszeichen ausgedrückt.

Die Elemente einer Funktion sind die Variablen und die Parameter. Die Variablen werden unterteilt in die unabhängigen und die abhängigen. Enthält die Funktion nur zwei Variable, so ist eine die unabhängige, häufig mit dem Buchstaben x bezeichnet, und die andere die abhängige Variable, häufig mit dem Buchstaben y bezeichnet. Man schreibt

$y = f(x)$ [gelesen: "y gleich f von x", y ist eine Funktion von x]

Die unabhängige Variable x kann innerhalb ihres Definitionsbereiches (die Menge aller möglichen Werte von x) einen beliebigen Wert annehmen, und die Funktion ordnet jedem Wert von x einen, und nur einen, Wert von y zu.

Wenn man die Zuordnungsvorschrift genau angeben will, schreibt man auch

$y(x)$ [gelesen: "y von x", y ist eine Funktion von x]

Zum Beispiel bestehe die Funktion darin, dass x mit der Zahl b multipliziert und zum Ergebnis die Zahl a addiert wird. Dann lautet die Funktion

$$y(x) = a + b \cdot x$$

Der Mathematiker identifiziert diese Funktion sofort als lineare Funktion, weil x nur in der ersten Potenz vorkommt ($x = x^1$). Die zeichnerische Darstellung einer solchen Funktion ergibt das Bild einer Geraden.

Bevor man aber die Gerade zeichnen kann, muss man den Wertebereich von x festlegen, das heißt, man muss angeben, für welche Werte von x die Funktion ausgewertet und gezeichnet werden soll. Benutzt man hierfür ein Mathematikprogramm, so muss man nicht alle Werte des Wertebereichs einzeln angeben, sondern man kann das Auslassungszeichen verwenden. So lässt sich in Mathcad der Wertebereich 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 folgendermaßen definieren:

$$x := 0..10$$

Wünscht man Zwischenwerte, so muss nur der dem Startwert folgende Wert eingegeben werden, und der Wertebereich wird mit der entsprechenden Schrittweite angepasst, zum Beispiel:

$$x := 0, 0.1 .. 10$$

Damit ist der Wertebereich in Schritte von jeweils 0,1 unterteilt. (Man beachte, dass Mathcad statt des Dezimalkommas den Dezimalpunkt verwendet. Das Komma steht hier für die Schrittweite.) Für die Darstellung einer Geraden ist eine so feine Unterteilung allerdings nicht notwendig, da eine Gerade durch nur zwei Punkte bereits hinreichend definiert ist.

Für die Konkretisierung der Funktion und für ihre grafische Darstellung müssen allerdings noch Werte für a und b angegeben werden. Diese Werte können beliebig sein, a und b sind also Variable, aber eben nicht die unabhängige Variable. Alle Variablen, die nicht die unabhängige Variable sind, nennt man Hilfsvariable oder Parameter. Mit $a = 1$ und $b = 2$ ergibt sich:

$x := 0 .. 10$ Wertebereich der unabhängigen Variablen

$a := 1$ Parameter

$b := 2$

$y(x) := a + b \cdot x$ Funktion

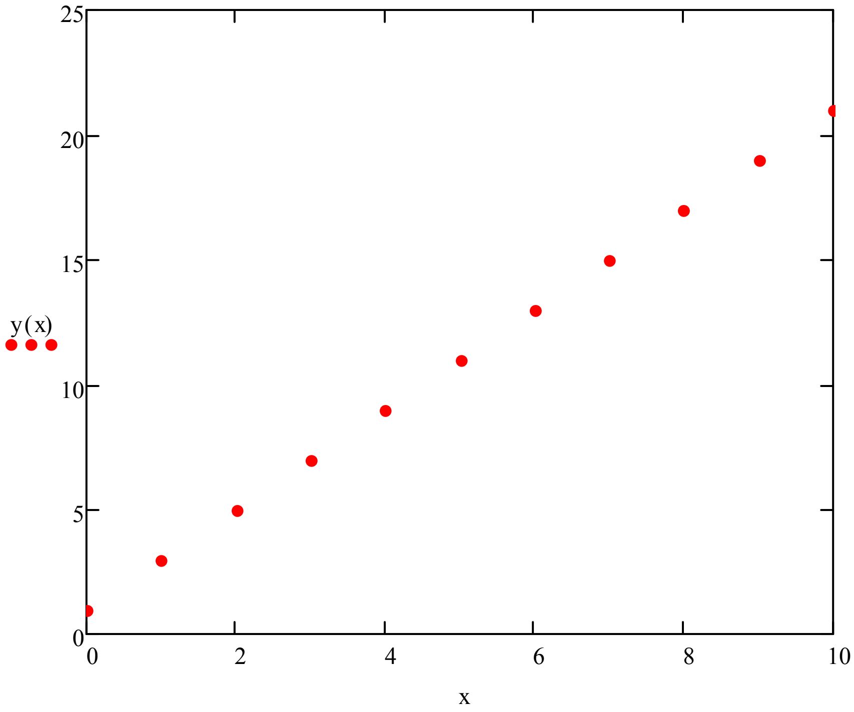
Wertetabelle

x =	y(x) =
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
7	15
8	17
9	19
10	21

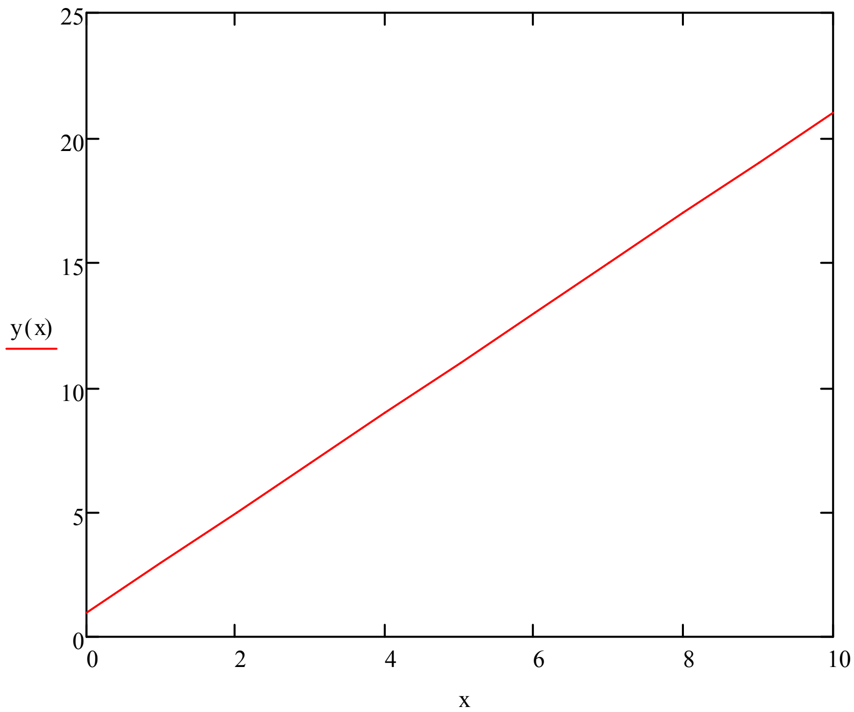
Für die grafische Darstellung von zwei Variablen ist das zweidimensionale kartesische Koordinatensystem üblich. Dieses besteht aus einer senkrechten Achse, auf der die Werte der unabhängigen Variablen abgetragen werden (Ordinate, y-Achse) und einer im Nullpunkt beginnenden horizontalen Achse (Abszisse, x-Achse). Der Schnittpunkt beider Achsen wird Ursprung des Koordinatensystems genannt. Hier sind sowohl x als auch y gleich null.

Um den Punkt (x, y) einzuzeichnen, zeichnet man durch den Punkt y auf der y-Achse eine Parallele zur x-Achse, und durch den Punkt x eine Parallele zur y-Achse. Im Schnittpunkt beider Parallelen (die man natürlich nur gedanklich einzeichnet) liegt der Punkt (x, y), den man in der Grafik kenntlich macht, wenn er als Punkt auch keine Ausdehnung hat.

Am besten lässt man die Funktion vom Computer zeichnen, was mit Mathcad bei mathematischen Funktionen besser geht als mit Excel:

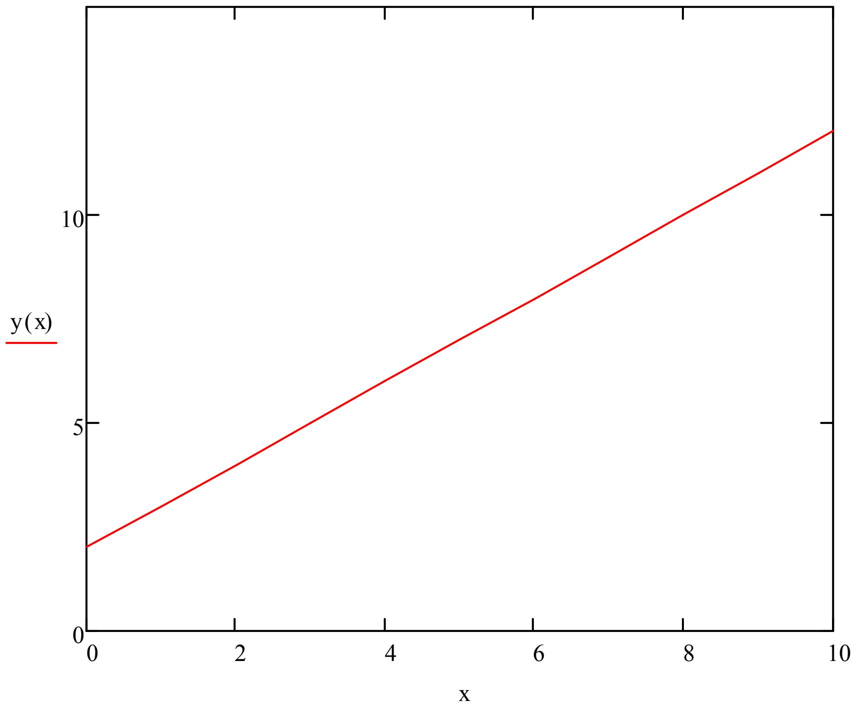


Wenn auch die Punkte vergrößert wurden, eine Gerade ist das nicht – da der Wertebereich von x nur 11 Werte umfasst, werden auch nur 11 Funktionswerte dargestellt. Das lässt sich aber leicht ändern, indem die Punkte durch eine Linie verbunden werden:



Dieses Verbinden von Datenpunkten, auch Interpolieren genannt, kann man getrost dem Computer überlassen, statt den Wertebereich explizit zu erweitern. (Für Mathcad-Anwender: Rechtsklick auf die Grafik > Formatieren > Registerkarte *Spuren* > Typ > Linien). Im Fall einer linearen Funktion gibt es auch keine Abweichung zwischen den tatsächlichen Funktionswerten und den interpolierten Werten, da alle Datenpunkte einer Geraden eben auf der Geraden liegen. Bei nicht-linearen Funktionen mag es zu Abweichungen kommen, aber im Allgemeinen funktioniert der Interpolationsalgorithmus, den man als Anwender nicht weiter hinterfragen muss, sehr gut.

An diesem Beispiel lässt sich auch der Einfluss der Parameter demonstrieren. Setzt man beispielsweise für $a = 2$ und $b = 1$, dann bleibt die Gerade eine Gerade, aber ihre Lage ändert sich:



Als Beispiel für eine nicht-lineare Funktion sei die Parabel betrachtet. Die allgemeine Funktion einer Parabel lautet

$$y(x) = a + b \cdot x^2$$

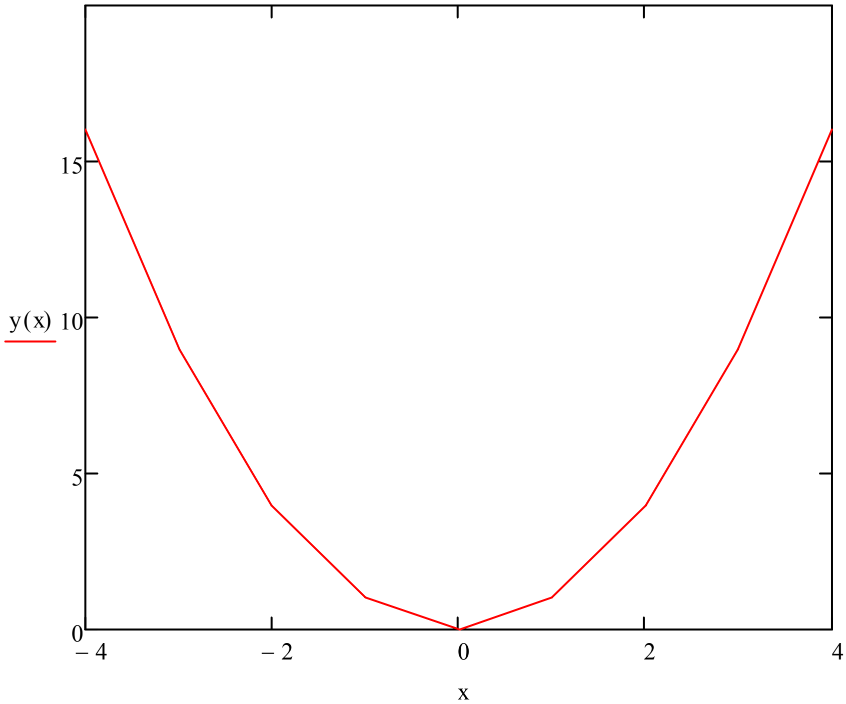
Mit $a = 0$ und $b = 1$ ergibt sich

$$y(x) = x^2$$

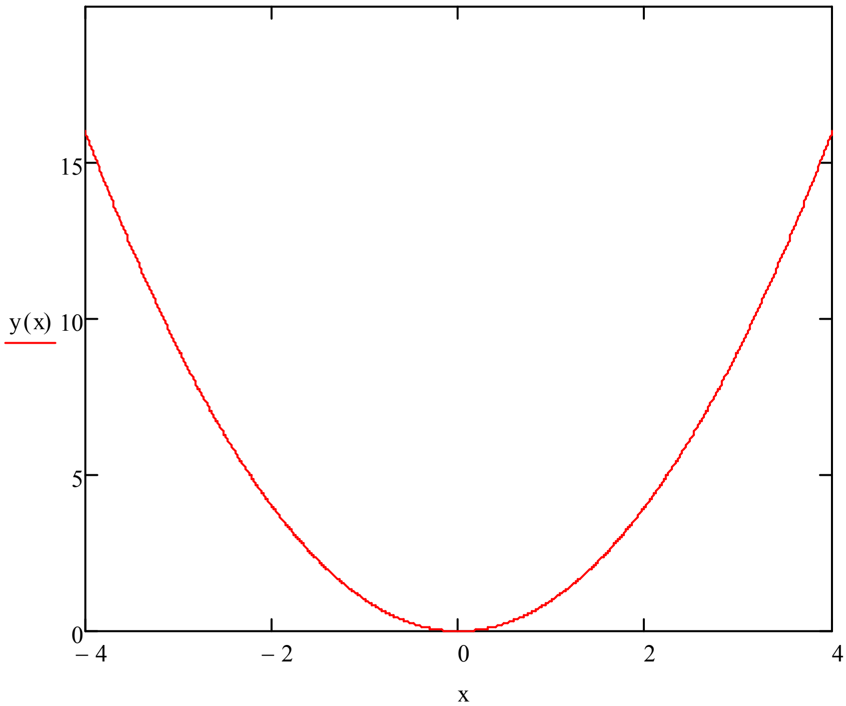
Die Wertetabelle dieser Funktion für $x := -4..4$ ist

x =	y(x) =
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

Die grafische Darstellung zeigt, dass der zuvor gelobte Interpolationsalgorithmus die Krümmung der Kurve nicht erkannt hat, sondern die vorhandenen Datenpunkte einfach durch gerade Linie verbunden wurden:



Dies kann man ändern, indem einfach mehr Datenpunkte in die Definition des Wertebereichs aufgenommen werden, zum Beispiel mit $x := -4, -3.99 .. 4$:



Die bisher behandelten Funktionen einer Geraden und einer Parabel sind für alle reellen Zahlen definiert. Dies folgt aus der Definition der reellen Zahlen als diejenigen Zahlen, die sich auf der Zahlengeraden darstellen lassen. Mit diesen Zahlen können die Addition, Subtraktion und Multiplikation stets durchgeführt werden und ergeben wieder eine reelle Zahl[1], also ein darstellbares Ergebnis der Funktionsauswertung. Andere Operationen sind für diese Funktionen nicht erforderlich.

[1] vgl. I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig, Taschenbuch der Mathematik, 7. Aufl. Frankfurt/M 2008, S. 1 f.

Dagegen ist die arithmetische Operation der Division für alle reellen Zahlen mit Ausnahme der null möglich. Der Ausdruck

$$\frac{a}{0}$$

ist nicht definiert. Wird in einer Funktion durch null geteilt, so ist bei demjenigen x-Wert, der dies erfordert, die Funktion nicht definiert. Ein Beispiel dafür ist die Funktion einer Hyperbel. Die Funktion lautet allgemein

$$y(x) = \frac{a}{x}$$

und mit $a = 1$

$$y(x) = \frac{1}{x}$$

Bei der Definition des Wertebereichs von x muss der Wert $x = 0$ vermieden werden, weil y(0) in diesem Fall nicht definiert ist. Mit Mathcad erhält man bei jedem Wertebereich von x, der $x = 0$ erhält, für den gesamten Bereich y(x) eine Fehlermeldung, sodass auch die übrigen y-Werte darin nicht enthalten sind. Man muss den Fall $x = 0$ anders abfangen.

Hierzu ist die Grenzwertbetrachtung nützlich. Man beobachtet, dass zwar $y(1) = 1$, aber y immer größer wird, je kleiner x wird. So ist $y(0{,}1) = 10$, $y(0{,}01) = 100$, $y(0{,}001) = 1.000$ usw. Der Funktionswert nähert sich umso mehr an die Unendlichkeit an, je kleiner x wird, aber noch positiv ist. Man sagt: Der Grenzwert von y ist unendlich, wenn x gegen null geht. Da x hier von einem größeren Wert zu einem kleineren Wert geht, sich also auf der Zahlengerade von rechts nach links bewegt (auf der Zahlengeraden stehen die positiven Zahlen rechts und die negativen links), nennt man diesen Wert einen rechtsseitigen Grenzwert und schreibt

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \to \infty$$ [gelesen: Der rechtsseitige Limes (Grenzwert) von 1:x für x gegen null ist unendlich]

Nun ist die Funktion y(x) auch für negative Werte von x definiert. Es gilt $y(-1) = -1$, $y(-0{,}1) = -10$, $y(-0{,}01) = -100$, $y(-0{,}001) = -1.000$ usw. Bewegt sich also x von links nach rechts auf die null zu, nähert sich der Funktionswert immer mehr an die negative Unendlichkeit an, je näher x an null kommt, aber noch negativ ist. Dieser Grenzwert ist hier ein linksseitiger Grenzwert, da die Annäherung von links nach rechts erfolgt. Man schreibt

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} \to -\infty$$ [gelesen: Der linksseitige Limes (Grenzwert) von 1:x für x gegen null ist minus unendlich]

Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert könnten also nicht unterschiedlicher sein. Es gibt hier keinen gemeinsamen Grenzwert. Für den Grenzwert ohne Vorgabe der Bewegungsrichtung (das heißt, er muss für beide gelten) schreibt man

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$ [gelesen: Limes von 1:x für x gegen null]

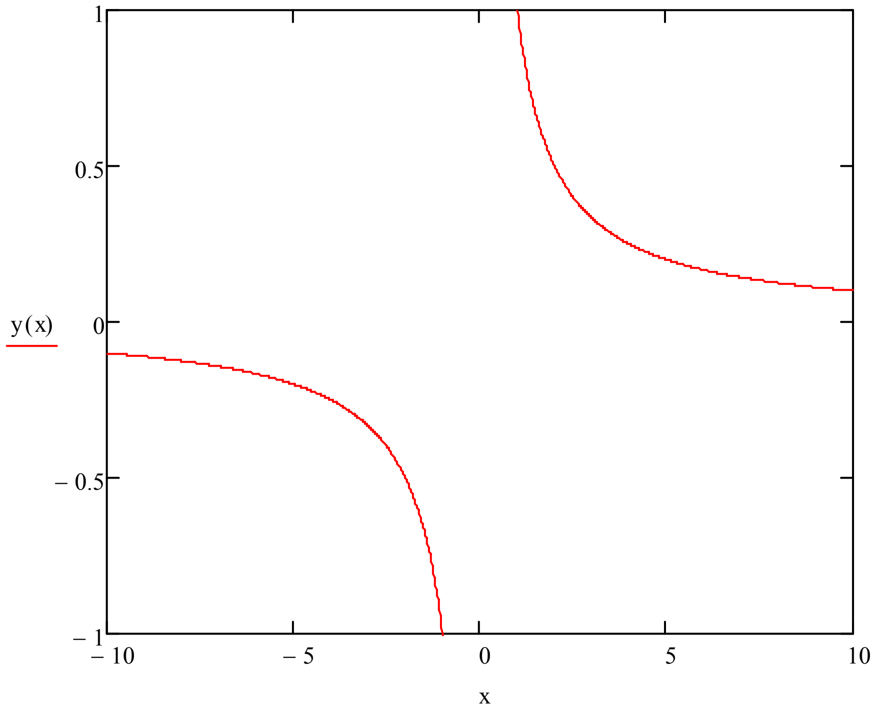
Diesen gemeinsamen Grenzwert gibt es hier aber nicht, und das Mathematikprogramm sagt richtig:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \to \text{undefined}$$

Der Funktionswert für $x = 0$ existiert eben nicht, es gibt hier in der Funktion eine Definitionslücke.

Diese Definitionslücke wird zwar beim Zeichnen der Funktion von Mathcad automatisch berücksichtigt, um die Lücke deutlich zu machen, sollte man sie aber in die Definition der Funktion aufnehmen. Dies kann man auf folgende Weise tun:

$$y(x) := \begin{vmatrix} \frac{1}{x} \quad \text{if } x \neq 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \quad \text{otherwise} \end{vmatrix}$$



Die Definitionslücke bei $x = 0$ umfasst zwar nur einen Punkt, reicht hinsichtlich der y-Werte aber von $-\infty$ bis $+\infty$.

So groß müssen Definitionslücken nicht sein. Als Beispiel[2] für eine Definitionslücke sei die Funktion

$$y(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$$

betrachtet. Man ist geneigt, diesen Ausdruck zu vereinfachen und erhält

$$y(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \frac{x \cdot (x - 2)}{x - 2} = x$$

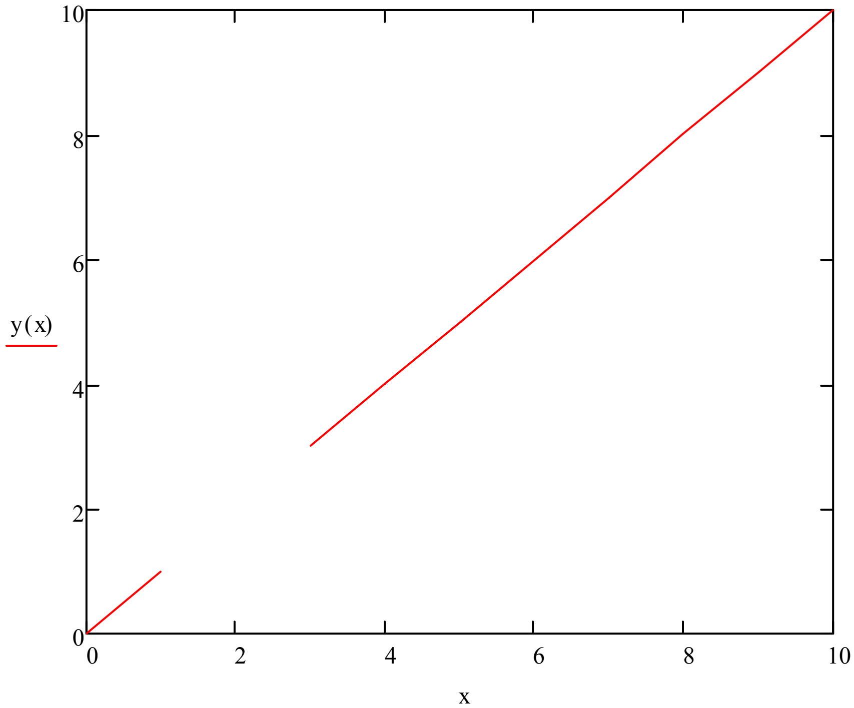
Es handelt sich schlicht um eine lineare Funktion. Die Funktion weist aber in der Tat eine Lücke auf, und zwar bei $x = 2$. Für diesen Wert ist die obige Vereinfachung nicht zulässig, denn

$$y(2) = \frac{2 \cdot (2 - 2)}{2 - 2} = \frac{0}{0} = \text{nicht definiert}$$

Bei $x = 2$ hat die Funktion eine Definitionslücke, und folgerichtig weist auch die grafische Darstellung diese Lücke auf:

---

[2] Quelle für das Beispiel: L. Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1, 7. Aufl. Braunschweig / Wiesbaden 1996, S. 170



Diese Definitionslücke lässt sich aber leicht füllen, sie ist behebbar. Man sieht an der grafischen Darstellung unmittelbar, dass sich die Lücke schließt, wenn sich x von links her an 2 annähert und gleichzeitig x von rechts her an 2 angenähert wird. Anders ausgedrückt: Der zweiseitige Grenzwert ist

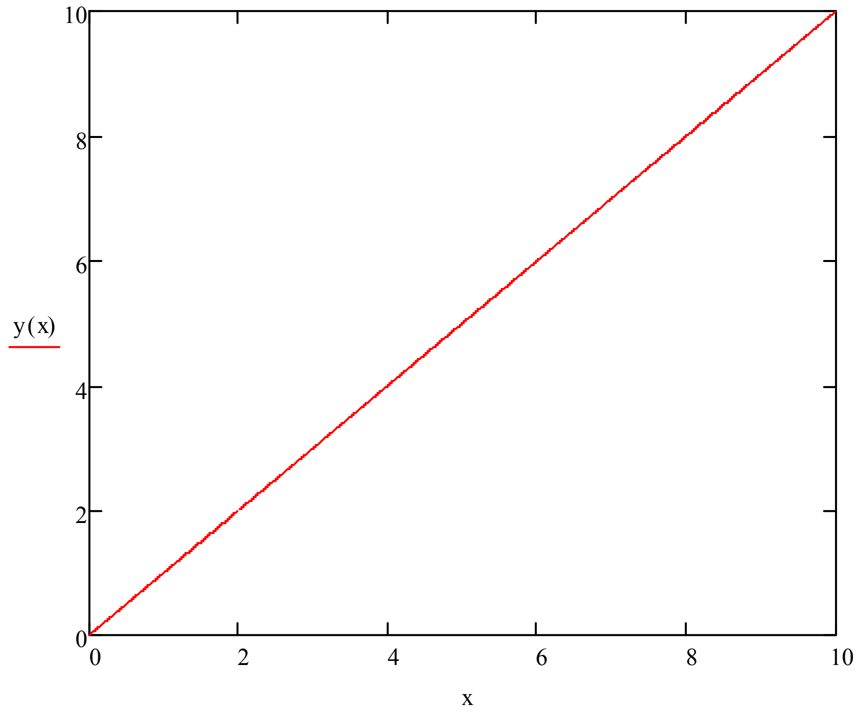
$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 2x}{x - 2} \right) \to 2$$

Dies kann man in die Definition der Funktion einbauen. Die Funktion lautet dann

$$y(x) := \left| \begin{array}{ll} \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2} & \text{if } x \neq 2 \\ \lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x^2 - 2x}{x - 2} \right) & \text{otherwise} \end{array} \right.$$

Allerdings lässt sich mit dieser Funktion in Mathcad keine Wertetabelle aufstellen, da der Grenzwert nur symbolisch ausgewertet werden kann. Damit kann zwar der Grenzwert bestimmt werden, aber er lässt sich nicht in eine Wertetabelle aufnehmen.

Für die grafische Darstellung muss man aber keine Wertetabelle für x aufstellen (in der Mathcad-Sprache: man muss keine Bereichsvariable definieren), sondern man kann die Funktion mit den Standardeinstellungen für x zeichnen lassen:



Wenn man genau hinsieht, kann man die Lücke noch erkennen, aber sie ist doch viel kleiner geworden. Es bleibt aber dabei, die Funktion hat eine Definitionslücke.

Beschäftigt man sich mit Funktionen, die für reelle Zahlen definiert sind, könnte man vermuten, dass sich diese Funktionen grafisch durch einen lückenlosen Linienzug darstellen lassen, ebenso wie alle reellen Zahlen die Zahlengerade lückenlos bedecken. Solche lückenlos darstellbare Funktionen nennt man stetig.

Wenn es aber Definitionslücken gibt, dann stockt der Linienzug. An dieser Stelle kann eine Funktion nicht stetig sein, sondern sie ist unstetig. In einer Definitionslücke ist eine Funktion nicht stetig.

Man sagt zum Beispiel: Die Funktion $\frac{1}{x}$ ist in 0 nicht stetig, da sie an dieser Stelle nicht definiert ist.

Sind nun aber nur die Definitionslücken für Unstetigkeitsstellen verantwortlich?

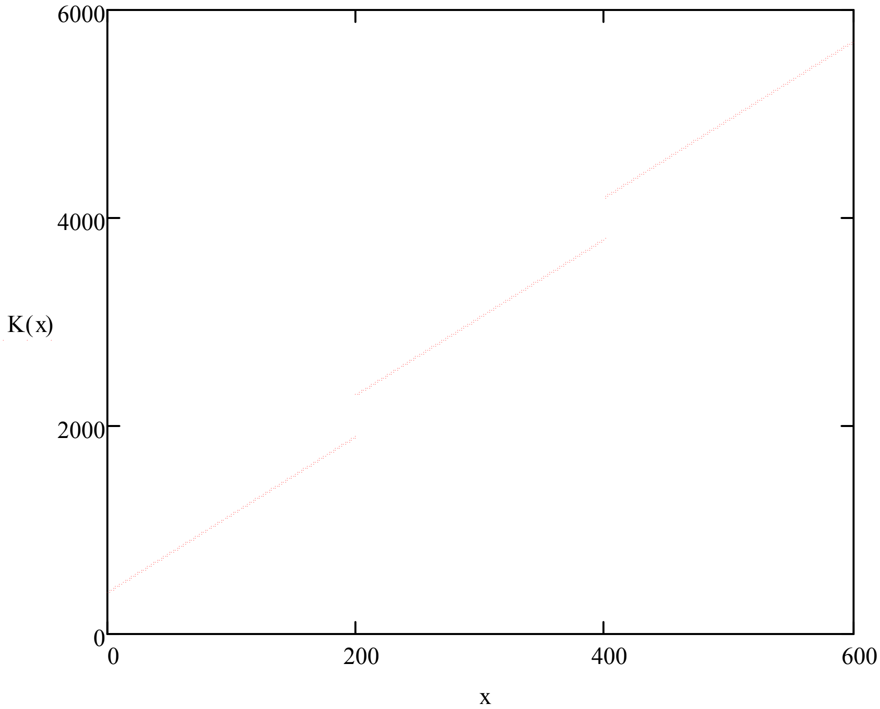
Ein Gegenbeispiel genügt, um diese Frage mit nein zu beantworten. Als Beispiel sei eine Funktion betrachtet, die in der Betriebswirtschaftslehre als Funktion der „sprungfixen Kosten“ bekannt ist.

$$K(x) := \left| \begin{array}{l} 400 + 7.5x \ \text{ if } \ x \geq 0 \wedge x < 200 \\ 800 + 7.5x \ \text{ if } \ x \geq 200 \wedge x < 400 \\ 1200 + 7.5x \ \text{ if } \ x \geq 400 \wedge x < 600 \end{array} \right.$$

Die Kosten betragen 400, wenn x = 0. Wenn x sich um eine Einheit erhöht, steigen die Kosten für jede Einheit um 7,50. Wenn aber x = 200 erreicht wird, muss zusätzliches Personal eingestellt werden, wodurch die Fixkosten um 400 ansteigen. Zwischen x = 200 und x < 400 steigen die Kosten wieder mit jeder Einheit von x um 7,50, bis bei x = 400 wiederum neues Personal eingestellt wird, welches die Fixkosten um 400 erhöht.

Wesentlich ist: Diese Funktion ist in ihrem Wertebereich überall definiert, es gibt keine Definitions-lücken, wie man bei 200 und 400 vermuten könnte. Bei x = 200 ist der Funktionswert vielmehr 2.300, bei x = 400 ist der Funktionswert 4.200.

Aber es gibt an diesen Stellen einen Sprung, und die Funktion ist hier offensichtlich unstetig:



$K(200) = 2300$

$K(400) = 4200$

Dies gibt Anlass, genauer über den Begriff der Stetigkeit nachzudenken. Wie aber lässt sich die Stetigkeit bzw. Unstetigkeit definieren, ohne dass eine Definitionslücke vorhanden ist?

Hierzu ist die Grenzwertbetrachtung nützlich. Im Beispielsfall gilt für den Bereich $x \geq 0$ und $x < 200$ die Teilfunktion K(x) = 400 + 7,5x. Lässt man in dieser Funktion x von kleineren Werten als 200 zu 200 gehen, dann ist der Grenzwert K(200) = 1.900. Tatsächlich gilt aber ab x = 200 die Teilfunktion K(x) = 800 + 7,5x und K(200) ist 2.300. Die Funktion hat hier eine Sprungstelle, die sie unstetig macht. Gäbe es diese Sprungstelle nicht, wäre der Funktionswert an dieser Stelle K(200) = 1.900 und würde mit dem Grenzwert übereinstimmen. Die Bedingung für die Stetigkeit an der Stelle x = 200 ist also, dass der Grenzwert mit dem Funktionswert übereinstimmt.

Bezeichnet man die auf Unstetigkeit untersuchte Stelle als x_0 , so kann man allgemein sagen:

Eine Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 linksseitig unstetig, wenn $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) \neq f(x_0)$.

Eine Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 linksseitig stetig, wenn $f(x_0)$ existiert und $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0)$.

Nähert man sich dagegen in der betrachteten Funktion dem Wert x = 200 von rechts, dann gilt für $x \geq 200$ und $x < 400$ die Teilfunktion K(x) = 800 + 7,5x. Der Grenzwert der Funktion für x = 200 ist 2.300, was mit dem Funktionswert K(200) übereinstimmt. Rechtsseitig ist die Funktion bei x = 200 also stetig. Somit gilt:

Eine Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 rechtsseitig unstetig, wenn $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) \neq f(x_0)$.

Eine Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 rechtsseitig stetig, wenn $f(x_0)$ existiert und $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = f(x_0)$.

Wenn eine Funktion in x_0 sowohl linksseitig als auch rechtsseitig stetig ist, bezeichnet man sie einfach als stetig. Es gilt:

Eine Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 stetig, wenn $f(x_0)$ existiert und $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Mithilfe dieser Regel lassen sich Unstetigkeitsstellen für vorgegebene Werte von x_0 finden, jedoch nicht für alle möglichen Werte von x. Hierfür wird x als irgendein Wert in die Definition stetiger Funktionen aufgenommen. Der Unterschied von x zum Anfangswert der Grenzwertbetrachtung wird als Δx bezeichnet, womit der Anfangswert $x + \Delta x$ ist. Eine Funktion ist dann für alle x stetig, wenn

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$$

Eine Funktion, für welche diese Bedingung erfüllt ist und die für alle Punkte der Zahlengeraden definiert ist, heißt *überall stetig*.

Am Beispiel einer offensichtlich stetigen Funktion der gewöhnlichen Geraden $f(x) = a + b \cdot x$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[a + b \cdot (x + \Delta x) \right] = \lim_{\Delta x \to 0} (a + b \cdot x + b \cdot \Delta x) = a + b \cdot x = f(x)$$

Die Funktion der Geraden ist überall stetig. Das Gleiche gilt für die Funktion $f(x) = a + b \cdot x^2$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[a + b \cdot (x + \Delta x)^2 \right] = \lim_{\Delta x \to 0} \left(a + b \cdot x^2 + 2b \cdot \Delta x + b \cdot \Delta x^2 \right) = a + b \cdot x^2 = f(x)$$

Für $f(x) = \frac{a}{x}$ ergibt sich

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a}{x + \Delta x} = \frac{a}{x} = f(x)$$

Diese Funktion ist mit Ausnahme der Definitionslücke bei $x = 0$ überall stetig.

Abschließend sei noch die Frage erörtert, ob eine stetige Funktion auch eine Knickstelle aufweisen kann, in der die Funktion plötzlich die Richtung ändert. Hierzu folgendes Beispiel[3]:

$$f(x) := |x - 2| + 1$$

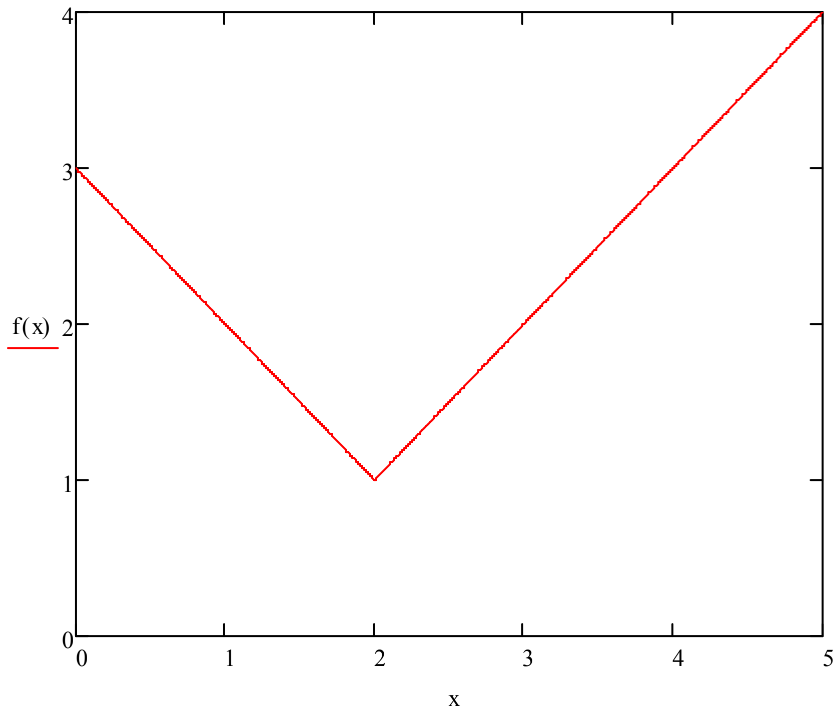
Dabei bedeuten die senkrechten Striche, dass der Absolutwert von $x - 2$ zum Funktionswert wird, unabhängig davon, ob das Vorzeichen positiv oder negativ ist. Der Absolutwert wird immer positiv gezählt. So ist $|-a| = a$, $|-2| = 2$.

Dementsprechend ergibt sich für $x := 0..5$ folgende Wertetabelle:

x =	f(x) =
0	3
1	2
2	1
3	2
4	3
5	4

Die grafische Darstellung zeigt einen Knick bei $(x = 2, y = 1)$:

[3] Quelle für das Beispiel: A.C. Chiang, K. Wainwright, H. Nitsch, Mathematik für Ökonomen, München 2011, S. 98



Ist die Funktion also bei $x = 2$ stetig oder liegt dort eine Unstetigkeitstelle?

Tatsächlich ist

$$f(2) = 1$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) \to 1$$

Es gilt also

$$f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$$

Die Bedingung für die Stetigkeit ist also erfüllt. Die Funktion ist in der Knickstelle stetig. Damit entspricht die Funktion auch der ursprünglichen naiven Definition der Stetigkeit, nämlich dass sie sich ohne abzusetzen zeichnen lässt. Das ist auch mit einer Knickstelle möglich.

14. Ableitungen

Um die Zusammenhänge zu verstehen, welche durch Funktionen beschreiben werden, muss man nicht immer die Funktion vollständig darstellen. Insbesondere bei ökonomischen Zusammenhängen kommt es vor, dass man sich nicht für *alle* möglichen Fälle interessiert, sondern nur für zwei: Wird der Gewinn im nächsten Jahr größer sein als in diesem Jahr, oder wird der Gewinn schrumpfen? Wird es gelingen, den Marktanteil zu steigern? Werden die Stückkosten steigen oder sinken, wenn mehr produziert wird? Hier gibt es viele Fragen, und eine Funktion gibt die Antworten.

Man vergleicht einfach zwei Punkte der Funktion miteinander. Sei der eine Punkt (x_0, y_0) und der andere (x_1, y_1), dann ist die Veränderung der unabhängigen Variablen

$$x_1 - x_0 = \Delta x \qquad [\text{gelesen: Delta x}]$$

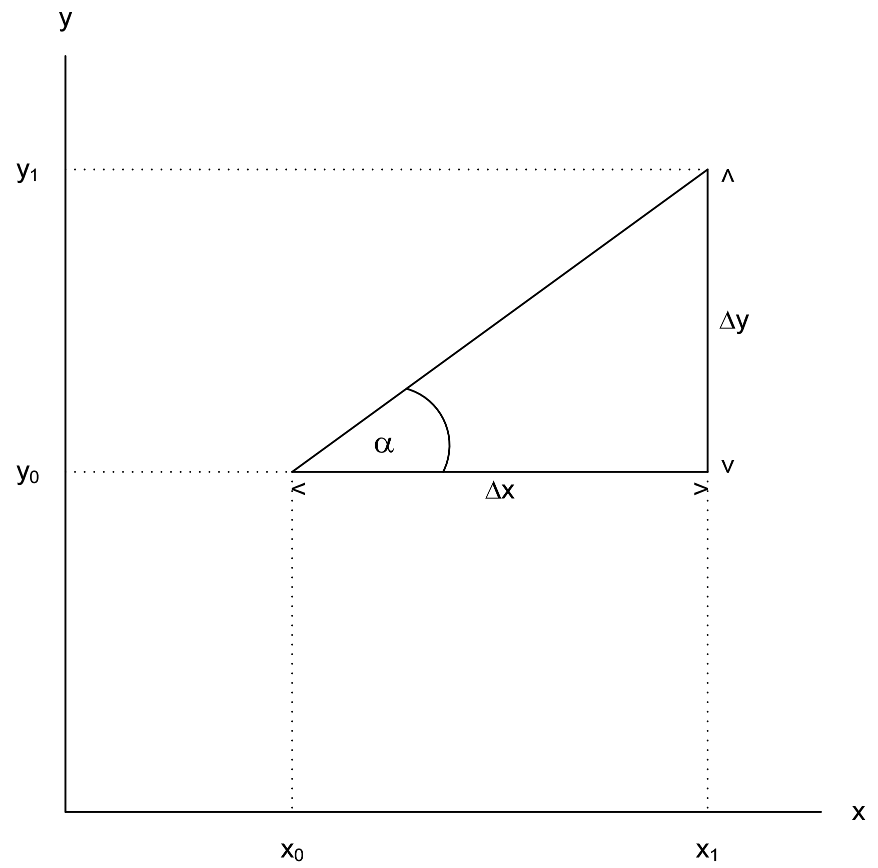
und die Veränderung der abhängigen Variablen

$$y_1 - y_0 = \Delta y$$

Diese beiden Größen kann man zueinander in Beziehung setzen, indem man ihr Verhältnis bildet. Der Quotient aus Veränderung der abhängigen Variablen und Veränderung der unabhängigen Variablen ist die Steigung:

$$\text{Steigung} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Dies in ein Diagramm eingezeichnet:



Verbindet man die beiden Punkte durch eine Strecke, sieht man, dass diese Strecke zusammen mit Δx und Δy ein rechtwinkliges Dreieck bildet. Mit α für den Winkel, den die Verbindungslinie und Δx einschließen, lässt sich die Steigung auch als Tangens dieses Winkels ausdrücken, denn

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{Steigung}$$

Die Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) können beliebig weit auseinander liegen; die Steigung auf einer gegebenen Verbindungsstrecke ist überall gleich. Die Verbindungsstrecke liegt auf einer Geraden, deren Steigung konstant ist.

Dies lässt sich zeigen, indem man die Steigung einer Geraden aus ihrer allgemeinen Funktion berechnet. Diese ist

$$y = a + b \cdot x$$

Damit gilt

$$y_0 = a + b \cdot x_0$$

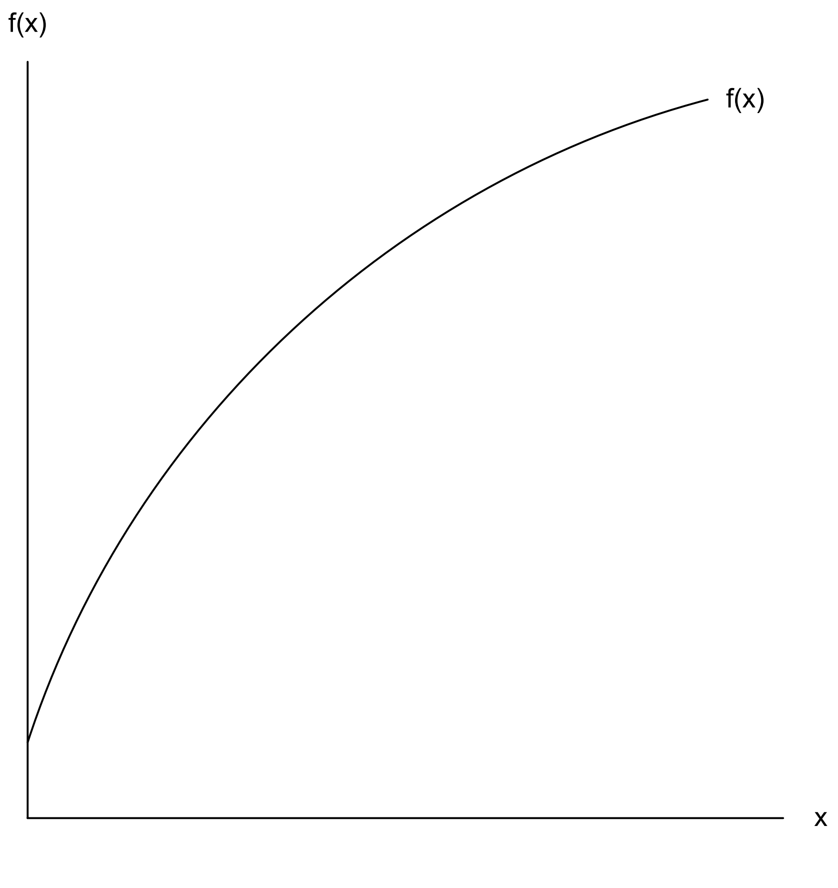
$$y_1 = a + b \cdot x_1$$

Für die Steigung ergibt sich

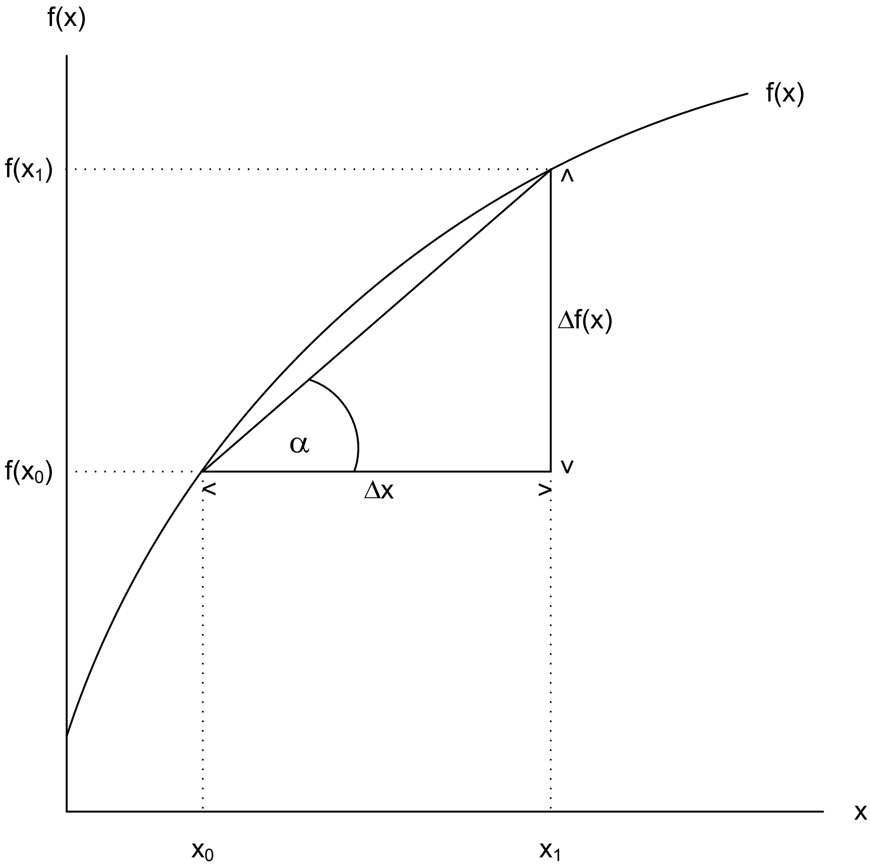
$$\begin{aligned}
\text{Steigung} = \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\
&= \frac{a + b \cdot x_1 - (a + b \cdot x_0)}{x_1 - x_0} \\
&= \frac{a + b \cdot x_1 - a - b \cdot x_0}{x_1 - x_0} \\
&= \frac{b \cdot (x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} \\
&= b
\end{aligned}$$

Der Parameter b der allgemeinen Funktion einer Geraden stellt also die Steigung dar.

Bei nicht-linearen Funktionen ändert sich die Steigung, je nachdem, welche Punkte zu ihrer Messung gewählt werden. Als Beispiel sei folgende nicht-lineare Funktion f(x) betrachtet:



Intuitiv würde man sagen: Die Steigung dieser Funktion ist positiv (es geht nach oben), aber die Steigung wird schwächer (der Weg wird weniger steil), je größer x wird. Mit dem bisher entwickelten Instrumentarium lässt sich aber nur die Steigung zwischen zwei wenn auch beliebigen Punkten feststellen:



Die Steigung zwischen den Punkten [x_0, $f(x_0)$] und [x_1, $f(x_1)$] ist auch hier gleich tan α, der Steigung der Verbindungslinie, aber die Verbindungslinie ist zwischen den beiden Punkten nicht mehr mit der Funktion identisch. Die Steigung der Verbindungslinie gibt nur die Steigung für die beiden gewählten Punkte der Funktion an, aber nicht die Steigung für die Punkte dazwischen.

Um die Steigung auch für alle Punkte der Funktion bestimmen zu können, wird die Definition der Steigung anders formuliert. Es gilt ja

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

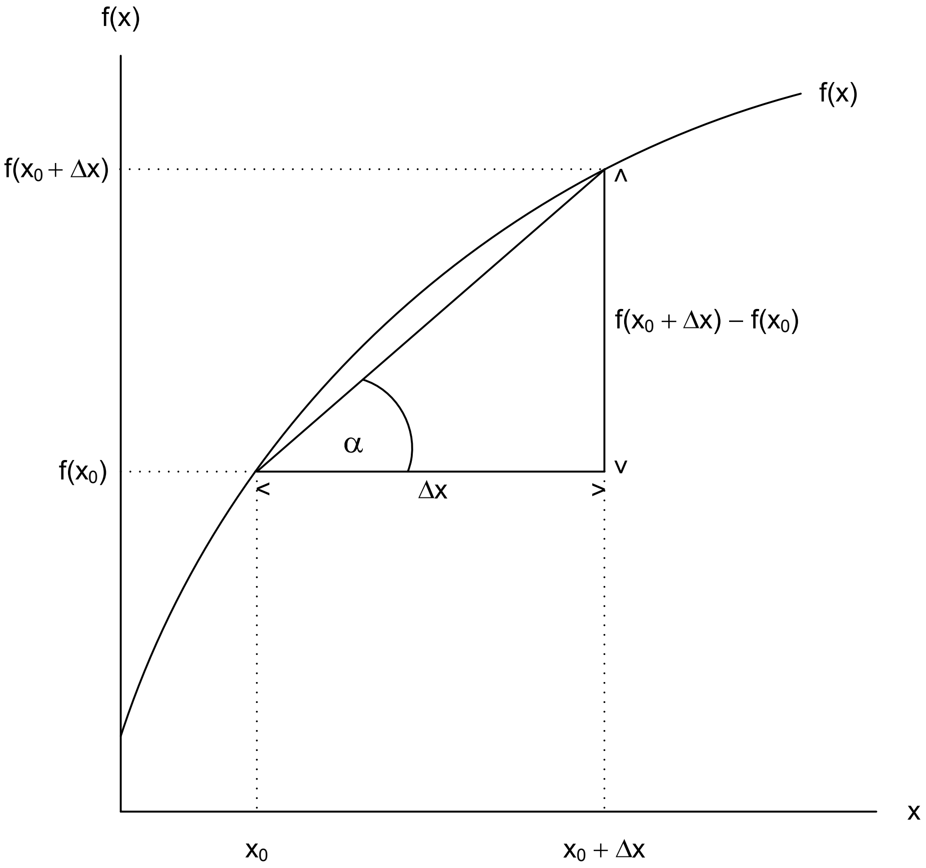
Hieraus folgt ohne Weiteres

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

Statt $f(x_1)$ kann man also schreiben $f(x_0 + \Delta x)$. Die Steigung als Verhältnis von Veränderung der abhängigen Variablen zur Veränderung der unabhängigen Variablen ist dann

$$\text{Steigung} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

In der grafischen Darstellung:



Geometrisch gesehen bildet die Verbindungslinie zwischen den beiden Punkten, bei denen die Steigung gemessen werden soll, eine Sekante. Arithmetisch gesehen ist die Steigung zwischen zwei Punkten ein Quotient von Differenzen, deswegen auch Differenzenquotient genannt.

Es ist nun von Interesse, wie groß die Steigung einer Funktion in einem einzigen beliebigen Punkt ist. Sei dieser Punkt $[x_0, f(x_0)]$, dann sollte sich dies feststellen lassen, indem im Differenzenquotient $\Delta x = 0$ gesetzt wird, denn dann ist der Abstand zwischen den beiden Punkten, aus dem die Steigung berechnet wird, gleich null und beide Punkte fallen in einem zusammen. Die bisherige Verbindungslinie zwischen beiden Punkten geht dann nur noch durch einen Punkt der Funktion, zeigt aber nach wie vor die Steigung an – die Steigung in diesem Punkt. Eine Gerade, die einen gemeinsamen Punkt mit einer Funktion hat und in diesem Punkt die gleiche Steigung aufweist wie die Funktion, nennt man eine Tangente. Dadurch, dass der Abstand zwischen zwei Schnittpunkten einer Sekante auf null gesetzt wird, verwandeln sich die Schnittpunkte in einen einzigen Berührungspunkt, und die Sekante wird zur Tangente. Die Steigung der Tangente ist die Steigung der Funktion im Berührungspunkt.

Damit wäre das Problem, die Steigung in einem Punkt einer Funktion zu bestimmen, zumindest geometrisch gelöst: Man lege eine Tangente durch den interessierenden Punkt und messe deren Steigung. Dies ist die Steigung der Funktion in diesem Punkt.

Für die arithmetische Lösung indessen muss der Nenner des Differenzenquotienten Δx gleich null sein. Durch null darf man aber nicht teilen. Man muss einen Grenzübergang durchführen.

Es wird definiert:

$$\text{Steigung} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Dieser Grenzwert des Differenzenquotienten wird Differenzialquotient genannt.

Der Wert x_0 im Differenzialquotienten ist beliebig; es kann jeder beliebige Wert von x eingesetzt werden. Um dies deutlich zu machen, wird der Differenzialquotient mit x statt x_0 formuliert. Da dieser

Differenzialquotient für alle möglichen Werte von x gilt, stellt er nunmehr eine Funktion dar, die erste Ableitung genannt wird. Man sagt auch „die Funktion wird differenziert“ und schreibt

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) \qquad [\text{gelesen: d f von x nach d x, f Strich von x}]$$

Die erste Ableitung einer differenzierbaren Funktion ist selbst eine Funktion, welche für jedes x die Steigung der abgeleiteten Funktion in diesem x angibt. Eine Funktion ist in x differenzierbar, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert. Wenn dies für alle x gilt, ist die Funktion überall differenzierbar, wenn der Grenzwert nur in einem bestimmten Bereich existiert, ist sie in diesem Bereich differenzierbar.

Für manche Funktionen lässt sich die erste Ableitung einfach ermitteln. Ein Beispiel ist die Funktion einer Geraden

$$y = a + b \cdot x$$

Für den Differenzenquotienten gilt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x} = \frac{a+b\cdot(x+\Delta x)-(a+b\cdot x)}{\Delta x} = \frac{a+b\cdot x+b\cdot\Delta x-a-b\cdot x}{\Delta x} = b$$

Schon der Differenzenquotient zeigt das erwartete Ergebnis, dass die Steigung einer Geraden durch den Parameter b gegeben ist. Da Δx im Differenzenquotienten nicht vorkommt, ändert sich dieser nicht, wenn Δx gleich null gesetzt wird. Der Differenzialquotient und der Differenzenquotient stimmen überein.

Erweitert man die betrachtete lineare Funktion zu einer quadratischen, etwa

$$y = a + b \cdot x + c \cdot x^2$$

so ergibt sich Folgendes:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{a+b\cdot(x+\Delta x)+c\cdot(x+\Delta x)^2-a-b\cdot x-c\cdot x^2}{\Delta x} \\
&= \frac{a+b\cdot x+b\cdot\Delta x+c\cdot x^2+2\cdot c\cdot x\cdot\Delta x+\Delta x^2-a-b\cdot x-c\cdot x^2}{\Delta x} \\
&= \frac{b\cdot\Delta x+2\cdot c\cdot x\cdot\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} \\
&= b+2\cdot c\cdot x+\Delta x \\
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{dy}{dx} = y' = b+2\cdot c\cdot x
\end{aligned}$$

Auch hier muss recht eigentlich kein Grenzübergang durchgeführt werden, sondern man kann Δx unmittelbar gleich null setzen. Eine Annäherung ist nicht erforderlich.

So einfach ist es aber nicht immer; und es ist auch für einfach zu differenzierende Funktionen viel zu mühsam, jedes Mal den Übergang vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten durchzuführen. Deswegen sind Rechenregeln entwickelt worden, die das Differenzieren vereinfachen.

Bevor einige dieser Regeln behandelt werden, muss man wissen, unter welchen Voraussetzungen sie anwendbar sind. Es versteht sich zwar, dass Regeln zur Ableitung nur auf differenzierbare Funktionen angewendet werden können – aber welche Funktionen sind differenzierbar?

Ein Blick auf die beiden bereits differenzierten Funktionen zeigt, dass diese eine gemeinsame Eigenschaft haben, nämlich dass sie stetig sind. In der Tat ist die Stetigkeit Voraussetzung dafür, dass eine

Funktion differenziert werden kann. Dies ergibt sich aus der Bedingung für die Stetigkeit einer Funktion, wie sie im vorigen Abschnitt abgeleitet wurde:

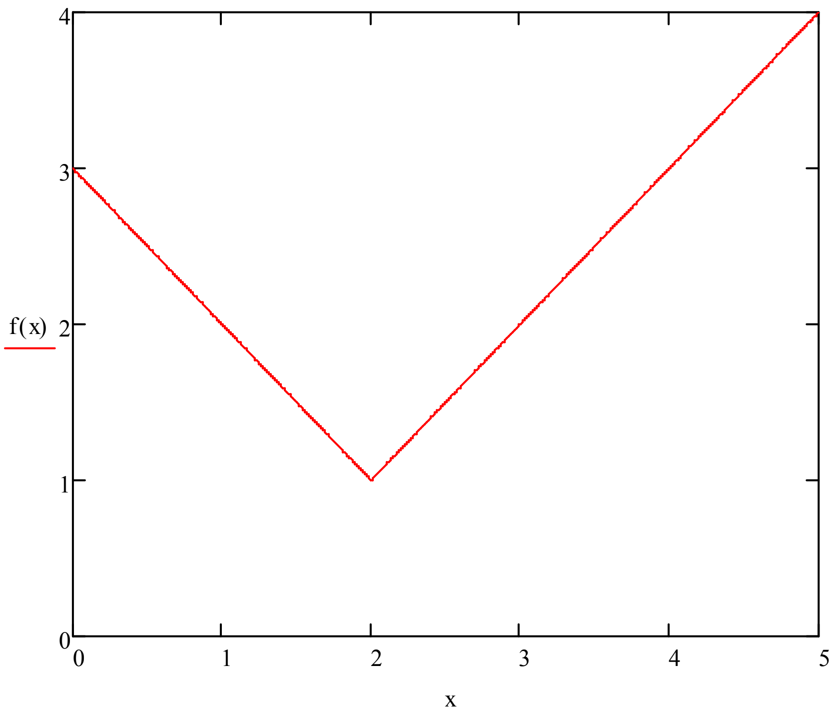
$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$$

Im Grenzübergang muss nach dieser Bedingung $f(x + \Delta x) = f(x)$ sein. Dies ist gleichbedeutend mit $f(x + \Delta x) - f(x) = 0$. Der Ausdruck $f(x + \Delta x) - f(x)$ bildet aber auch den Zähler des Differenzenquotienten, und dieser wird zum Differenzialquotienten, wenn Δx gegen null geht. Wenn also $\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$ existiert, ist eine Funktion stetig, und der Zähler des Differenzialquotienten existiert. Das aber ist Voraussetzung für die Existenz des Differenzialquotienten und damit für die Differenzierbarkeit der Funktion. Die Stetigkeit einer Funktion ist also Voraussetzung für ihre Differenzierbarkeit. Nur stetige Funktionen sind differenzierbar.

Es ist allerdings möglich, dass zwar der Zähler des Differenzialquotienten existiert, die Funktion also stetig ist, aber im Zusammenwirken mit dem Nenner sich trotzdem kein Differenzialquotient ergibt. Dann ist die Funktion nicht differenzierbar, obwohl sie stetig ist. Die Stetigkeit ist also Voraussetzung für die Differenzierbarkeit, sie ist eine notwendige Bedingung, aber nicht alle stetigen Funktionen sind differenzierbar. Die Stetigkeit ist keine hinreichende Bedingung für die Differenzierbarkeit. Ein Beispiel hierfür ist die bereits im vorigen Abschnitt behandelte Funktion

$$f(x) := |x - 2| + 1$$

Wie dargestellt, hat diese Funktion bei x = 2 einen Knick:



Wegen

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(2 + \Delta x) \to f(2)$$

ist diese Funktion auch im Knickpunkt stetig.

Ob die Funktion in diesem Punkt aber auch differenziert werden kann, zeigt die Untersuchung des Differenzialquotienten. Diese wird für x = 0, 1, 2, 3, 4, 5 durchgeführt:

$x := 0..5$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x + \Delta x - 2| + 1 - (|x - 2| + 1)}{\Delta x} \to \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \text{undefined} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Das Mathematik-Programm zeigt an, dass der Differenzialquotient für $x = 2$ nicht definiert ist, das heißt, an der Knickstelle ist die Funktion nicht differenzierbar – obwohl sie dort stetig ist.

Der formale Grund liegt darin, dass im Knickpunkt der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten nicht übereinstimmen. Bis zum Knick ist die Steigung der Funktion – 1, ab dem Knick 1. Im Knickpunkt selbst ist der linksseitige Grenzwert – 1 und der rechtsseitige 1:

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|2 + \Delta x - 2| + 1 - (|2 - 2| + 1)}{\Delta x} \to -1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|2 + \Delta x - 2| + 1 - (|2 - 2| + 1)}{\Delta x} \to 1$$

Beide stimmen nicht überein, und deswegen existiert der beidseitige Grenzwert nicht. Eine Tangente kann in einem Punkt nicht gleichzeitig die Steigung 1 und – 1 haben. Im Knickpunkt kann man keine Tangente zeichnen.

Tatsächlich setzt sich die dargestellte Funktion aus zwei Geraden zusammen. Diese Funktion lautet

$$y(x) := \begin{vmatrix} 3 - x & \text{if } x \le 2 \\ -1 + x & \text{if } x \ge 2 \end{vmatrix}$$

x =	y(x) =
0	3
1	2
2	1
3	2
4	3
5	4

Das Beispiel mag hergeholt erscheinen, aber es vermittelt eben doch die Erkenntnis, dass nicht alle stetigen Funktionen differenzierbar sind.

Im Folgenden seien nun einige Ableitungsregeln behandelt. Hierbei sind u, v, w, y differenzierbare Funktionen der unabhängigen Variablen x und a, b, c, n Konstante.

Konstantenregel

Die Ableitung einer Konstanten c ist c' = 0.

Beweis:

Die Funktion einer Konstanten lautet $y(x) = c$. Für jedes x weist diese Funktion den gleichen Wert auf. Verändert sich x um Δx, verändert sich der Funktionswert nicht, das heißt, es gilt

$$y(x + \Delta x) = y(x) = c$$

Für den Differenzenquotienten folgt hieraus

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

Da Δx im Differenzenquotienten nicht vorkommt, ändert sich dieser nicht, wenn Δx gegen null geht, sondern der Differenzenquotient wird unmittelbar zum Differenzialquotienten.

Faktorregel

Ein konstanter Faktor c bleibt beim Differenzieren erhalten:

$$(c \cdot y)' = c \cdot y'$$

Beweis:

Der Differenzenquotient ist

$$\frac{\Delta c \cdot y}{\Delta x} = \frac{c \cdot y(x + \Delta x) - c \cdot y(x)}{\Delta x} = c \cdot \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

Der Grenzübergang lässt c unverändert, sodass

$$(c \cdot y)' = \lim_{\Delta x \to 0} c \cdot \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = c \cdot y'$$

Summenregel

Die Ableitung einer Summe oder Differenz von Funktionen ist gleich der Summe oder Differenz der Ableitungen diese Funktionen:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

Beweis:

$$\frac{\Delta(u \pm v)}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x) \pm v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$(u \pm v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u \pm v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u' \pm v'$$

Für mehr als zwei Funktionen lässt sich der Beweis entsprechend erweitern.

Potenzregel

Mit n für eine reelle Zahl gilt

$$y = x^n$$

$$y' = n \cdot x^{n-1}$$

Beispiele:

$$y = x = x^1$$

$$y' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$y = x^2$$

$$y' = 2 \cdot x$$

$$y = x^3$$

$$y' = 3 \cdot x^2$$

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$y' = -1 \cdot x^{-1-1} = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$y' = -2 \cdot x^{-2-1} = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$y = a + b \cdot x$$

$$y' = b$$

$$y = a + b \cdot x^2 + c \cdot x^3$$

$$y' = 2 \cdot b \cdot x + 3 \cdot c \cdot x^2$$

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

$$y' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$y = 1 = x^0$$

$$y' = 0 \cdot x^{0-1} = 0 \cdot x^{-1} = \frac{0}{x} = 0$$

$$y = c = c \cdot 1 = c \cdot x^0$$

$$y' = c \cdot 0 \cdot x^{0-1} = c \cdot 0 \cdot x^{-1} = \frac{c \cdot 0}{x} = 0$$

Produktregel für zwei Funktionen

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Beispiel:

$$y=\left(x^3-12\cdot x^2+60\cdot x+98\right)\cdot x^{-1}$$

$$\begin{aligned}
y' &= \left(3x^2-24x+60\right)\cdot x^{-1}+\left(x^3-12x^2+60x+98\right)\cdot(-1)\cdot x^{-2}\\
&= \frac{3x^2-24x+60}{x}-\frac{x^3-12x^2+60x+98}{x^2}\\
&= 3x-24+\frac{60}{x}-x+12-\frac{60}{x}-\frac{98}{x^2}\\
&= 2x-12-\frac{98}{x^2}
\end{aligned}$$

Produktregel für drei Funktionen

$$(u\cdot v\cdot w)'=u'\cdot v\cdot w+u\cdot v'\cdot w+u\cdot v\cdot w'$$

Beispiel:

$$y=\left(\frac{1}{x}-2\right)^3=\left(\frac{1}{x}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{x}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{x}-2\right)$$

$$\begin{aligned}
y' &= \left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{x}-2\right)+\left(\frac{1}{x}-2\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}-2\right)+\left(\frac{1}{x}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{x}-2\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\
&= 3\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{x}-2\right)\\
&= -\frac{3\cdot\left(\frac{1}{x}-2\right)^2}{x^2}\\
&= \frac{-3\cdot\left(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x}+4\right)\cdot x^2}{x^2\cdot x^2}\\
&= \frac{-3\cdot\left(1-4x+4x^2\right)}{x^4}\\
&= -\frac{3\cdot(2x-1)^2}{x^4}
\end{aligned}$$

Produktregel für n Funktionen

$$(u_1\cdot u_2\ldots\cdot u_n)'=\sum_{i=1}^{n}u_1\cdot u_2\ldots\cdot u'_i\ldots\cdot u_n$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{v\cdot u'-u\cdot v'}{v^2}$$

Beispiel:

$$y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$y' = \frac{(x^2-1)\cdot 2\cdot x-(x^2+1)\cdot 2\cdot x}{(x^2-1)^2} = 2\cdot x\cdot\frac{x^2-1-x^2-1}{(x^2-1)^2} = 2\cdot x\cdot\frac{-2}{(x^2-1)^2} = -\frac{4\cdot x}{(x^2-1)^2}$$

Kettenregel

Die Kettenregel wird angewendet, wenn die unabhängige Variable einer Funktion selbst eine Funktion ist. Statt $y = u(x)$ lautet eine solche Funktion

$$y = u\left[v(x)\right]$$

Die gemeinsame Funktion nennt man eine mittelbare Funktion, die Funktion, die auf eine andere Funktion anzuwenden ist, heißt äußere Funktion, und die Funktion, welche die unabhängige Variable darstellt, ist die innere Funktion.

$u\left[v(x)\right]$ Mittelbare Funktion

$u(v)$ Äußere Funktion

$v(x)$ Innere Funktion

Die Ableitung der mittelbaren Funktion $y = u\left[v(x)\right]$ ist

$$y' = \left(u\left[v(x)\right]\right)' = u'(v)\cdot v'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Beispiel:

$$y = \left(x^2+1\right)^{100}$$

Diese Funktion kann nicht einfach nach der Potenzregel abgeleitet werden, da nicht x zur 100. Potenz zu erheben ist, sondern die Funktion $x^2 + 1$. Die innere Funktion lautet also

$$v(x) = x^2+1$$

Diese Funktion soll potenziert werden, sodass die äußere Funktion lautet

$$u(v) = v^{100}$$

Nach der Kettenregel gilt nun

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = 100\cdot v^{99}\cdot 2\cdot x = 100\cdot\left(x^2+1\right)^{99}\cdot 2\cdot x = 200\cdot x\cdot\left(x^2+1\right)^{99}$$

Für eine mittelbare Funktion, die aus drei miteinander verknüpften Funktionen besteht, lautet die Kettenregel

$$y = u\left(v\left[w(x)\right]\right)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}$$

Ableitung von Exponentialfunktionen

$$y = e^x$$

$$y' = e^x$$

$$y = e^{a \cdot x}$$

$$y' = a \cdot e^{a \cdot x}$$

$$y = a^x$$

$$y' = a^x \cdot \ln a$$

$$y = a^{b \cdot x}$$

$$y' = b \cdot a^{b \cdot x} \cdot \ln a$$

Ableitung von Logarithmusfunktionen

$$y = \ln x$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \log_a x$$

$$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$y = \log x$$

$$y' = \frac{1}{x \cdot \ln 10}$$

Partielle Ableitungen

Wenn die abzuleitende Funktion mehr als eine unabhängige Variable aufweist, können Ableitungen nach einer bestimmten Variablen gebildet werden, indem alle anderen unabhängigen Variablen als konstant betrachtet werden. Seien die unabhängigen Variablen $x_1, x_2 \ldots x_n$ und der Index $i = 1 \ldots n$, ist

$$y = f\left(x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n\right)$$

Die partielle Ableitung nach x_i ist

$$\frac{\delta y}{\delta x_i} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_1, x_2 \ldots x_i + \Delta x_i \ldots x_n\right) - f\left(x_1, x_2 \ldots x_n\right)}{\Delta x_i}$$

Beispiel:

$$y\left(x_1, x_2\right) = 2 \cdot x_1^{0,5} \cdot x_2$$

$$\frac{\delta y}{\delta x_1} = 2 \cdot 0,5 \cdot x_1^{-0,5} \cdot x_2 = \frac{x_2}{x_1^{0,5}}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x_2} = 2 \cdot x_1^{0,5} \cdot x_2^0 = 2 \cdot x_1^{0,5}$$

15. Integrale

Integrale sind das Gegenteil von Ableitungen. Die Differenzialrechnung sucht zu einer Funktion die Ableitung, die Integralrechnung sucht zu einer Ableitung die Funktion. Die zu integrierende Funktion ist der sogenannte Integrand; die Funktion, deren Ableitung wiederum den Integranden ergibt, ist die Stammfunktion. Wird der Integrand als f(x) bezeichnet, so wählt man als Bezeichnung für die Stammfunktion F(x).

Mit der Funktion f(x) im Mittelpunkt gelten folgende Zusammenhänge:

$$F(x) \xleftarrow[\text{Integral}]{} f(x) \xrightarrow[\text{Ableitung}]{} f'(x)$$

Von der Stammfunktion F(x) aus gesehen gilt

$$F(x) \xrightarrow[\text{1. Ableitung}]{} F'(x) = f(x) \xrightarrow[\text{2. Ableitung}]{} f'(x)$$

Beispiel:

$$\frac{1}{3}\cdot x^3 \xleftarrow[\text{Integral}]{} x^2 \xrightarrow[\text{Ableitung}]{} 2\cdot x$$

$$\frac{1}{3}\cdot x^3 \xrightarrow[\text{1. Ableitung}]{} x^2 \xrightarrow[\text{2. Ableitung}]{} 2\cdot x$$

Für die Ermittlung von Integralen, die Integration, gibt es zwar einige Regeln, aber keine allgemeine Regel, mit der man die Stammfunktion aus beliebigen elementaren Funktionen berechnen kann[4]. Die arithmetische Form der Integrale findet man am besten durch intelligentes Probieren oder durch sein Mathematikprogramm. Auf jeden Fall empfiehlt es sich, die gefundene Stammfunktion wieder abzuleiten und zu kontrollieren, ob die Ableitung wirklich mit dem Integranden übereinstimmt.

So ergibt die Ableitung von $\frac{1}{3}\cdot x^3$ in der Tat x^2:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\cdot x^3\right) \rightarrow x^2$$

Aber auch die Funktion $\frac{1}{3}\cdot x^3 + C$ mit C als beliebiger Konstante hat die Ableitung x^2, denn eine Konstante fällt beim Ableiten fort.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\cdot x^3 + C\right) \rightarrow x^2$$

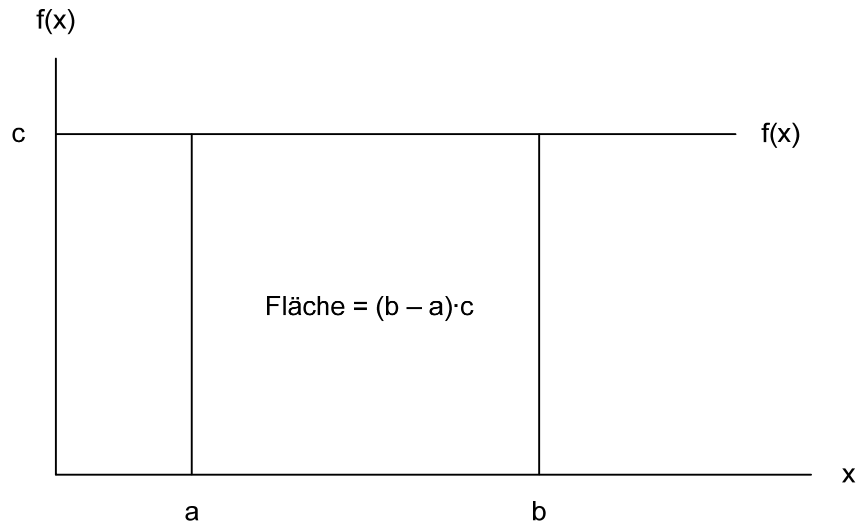
Da die Integrationskonstante C beliebige Werte annehmen kann, gibt es zu einer gegebenen Funktion f(x) unendlich viele Stammfunktionen, die sich alle in der Konstanten C unterscheiden können.

4 vgl. I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig, Taschenbuch der Mathematik, 7. Aufl. Frankfurt/M 2008, S. 484 und für die Regeln S. 484 ff.

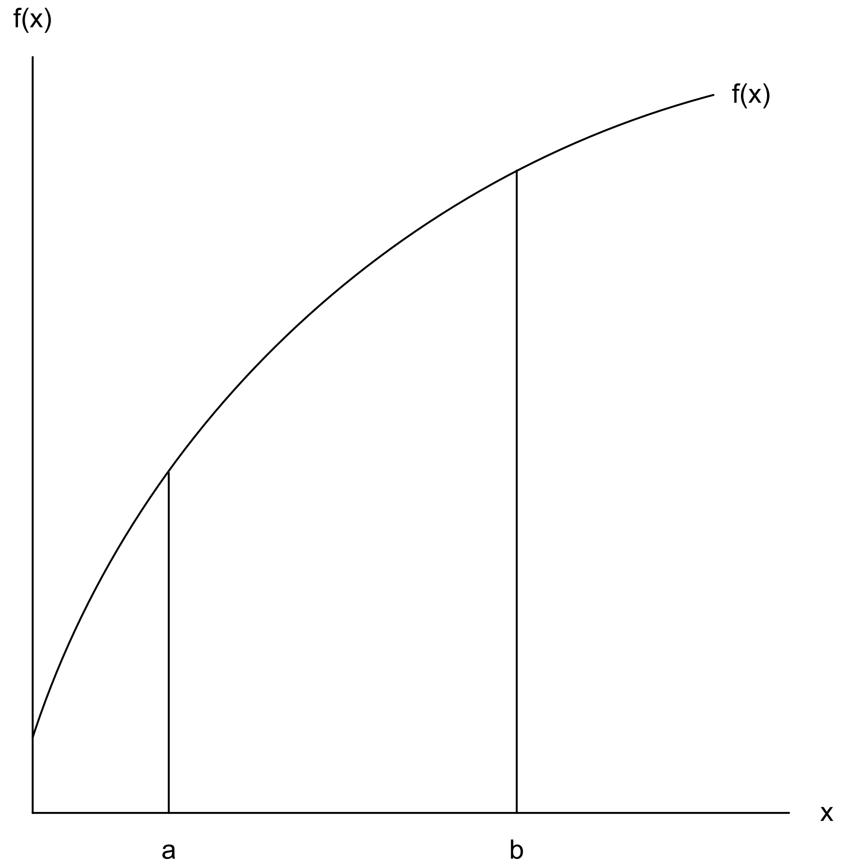
Deswegen heißen diese Stammfunktionen das *unbestimmte* Integral. Das unbestimmte Integral von $f(x)$ ist $F(x) + C$.

Es liegt die Frage nahe, was denn nun ein *bestimmtes* Integral ist. Das bestimmte Integral ist die Antwort auf die ursprüngliche Frage, die zum Begriff des Integrals geführt hat. Diese ursprüngliche Frage lautet: Wie bestimmt man die Fläche unter einer Kurve, die Fläche, die von einer Funktion eingeschlossen ist?

Bei linearen Funktionen ist das nicht schwierig. Betrachten wir ein Rechteck, welches von der Funktion $f(x) = c$ zwischen den Punkten a und b gebildet wird:



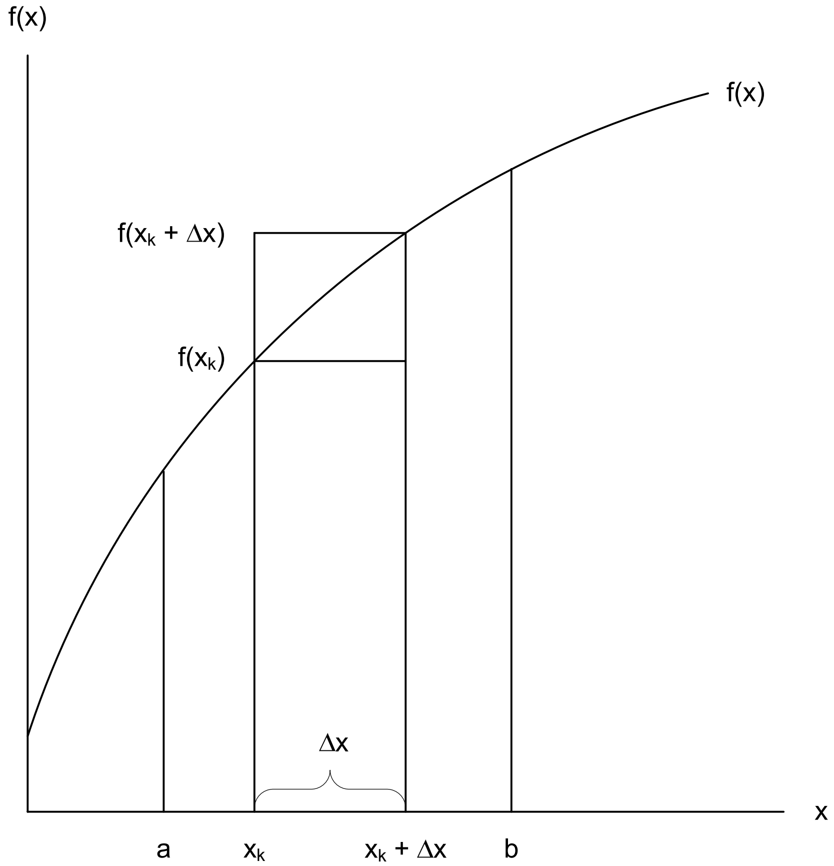
Wie sieht es aber bei einer nicht-linearen Funktion aus?



Wie groß ist die Fläche, die von dieser Funktion zwischen den Punkten a und b eingeschlossen wird?

Hier versagen die elementaren Methoden der Flächenbestimmung wie die Multiplikation der Breite eines Rechtecks mit seiner Höhe, denn die zwischen a und b eingeschlossene Fläche ist eben kein Rechteck.

Man kann nur versuchen, die die zur Flächenbestimmung geeigneten Rechtecke künstlich herzustellen, indem man die zu bestimmende Fläche in Rechtecke unterteilt. Sei x_k der linke Eckpunkt eines dieser Rechtecke und die Breite Δx, dann ergibt sich für dieses Rechteck folgendes Bild:



Um die Fläche unter $f(x)$ zwischen x_k und $x_k + \Delta x$ darzustellen, bieten sich nun die Flächen zweier Rechtecke an, einmal das Rechteck mit den Eckpunkten $(x_k,0)$, $[x_k, f(x_k)]$, $[x + \Delta x, f(x_k)]$, $[x_k + \Delta x, 0]$, zum anderen das Rechteck mit den Eckpunkten $(x_k,0)$, $[x_k, f(x_k + \Delta x)]$, $[x + \Delta x, f(x_k + \Delta x)]$, $[x_k + \Delta x, 0]$. Jedoch ist die Fläche des ersten Rechtecks kleiner als die von der Funktion $f(x)$ zwischen x_k und $x_k + \Delta x$ eingeschlossene Fläche, und die des zweiten Rechtecks ist zu groß. Dementsprechend heißt die Summe aller zwischen a und b konstruierten Rechtecke, die zu klein sind, die Untersumme, und die Summe der zu großen Rechtecke heißt die Obersumme.

Wie viele – gleichartige – Rechtecke zwischen a und b passen, hängt natürlich von ihrer Breite Δx ab. Sei n die Anzahl der summierenden Rechtecke, dann ist

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Das erste Rechteck hat seinen linken Eckpunkt bei $x_k = a$, das nächste beginnt bei $x_k = a + \Delta x$, das übernächste beginnt bei $x_k = a + 2\Delta x$, bis zum letzten, das bei $x_k = b - \Delta x$ beginnt. x_k kann also folgende Werte annehmen:

$$x_k = a, a+\Delta x, a+2\Delta x, \ldots b-\Delta x$$

Damit ergibt sich für die Untersumme

$$\sum_{x_k=a}^{b-\Delta x} f(x_k)\cdot\Delta x$$

und für die Obersumme

$$\sum_{x_k=a}^{b-\Delta x} f(x_k+\Delta x)\cdot\Delta x$$

Diese Definitionen der Ober- und Untersumme sind indessen nur gültig, wenn die Funktion $f(x)$ eine positive Steigung hat. Bei einer negativen Steigung ist $f(x_k+\Delta x)$ kleiner als $f(x_k)$, womit auch die Fläche $f(x_k+\Delta x)\cdot\Delta x$ kleiner wird als die Fläche $f(x_k)\cdot\Delta x$. Die Summe der kleineren Flächen, die Untersumme, ist dann $\sum_{x_k=a}^{b-\Delta x} f(x_k+\Delta x)\cdot\Delta x$ und die Summe der größeren Flächen, die Obersumme, $\sum_{x_k=a}^{b-\Delta x} f(x_k)\cdot\Delta x$.

Welche der beiden Summendefinitionen die Ober- oder die Untersumme darstellen, ist aber für die Bestimmung der Fläche unter der Funktion $f(x)$ gleichgültig, da in jedem Fall die eine Summe zu groß ist und die andere zu klein. Beide müssen aneinander angenähert werden. Dies erreicht man, wenn die Zahl der Rechtecke gegen unendlich geht und damit Δx gegen null. Dann ist $x_k+\Delta x = x_k$, Obersumme und Untersumme stimmen überein und geben die Fläche unter der Funktion $f(x)$ richtig an. Um dies anzuzeigen, wird geschrieben:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{x_k=a}^{b-\Delta x} f(x_k)\cdot\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

Dies ist die Definition des bestimmten Integrals.[5] Aus dem Summenzeichen wird das Integralzeichen, aus der Summationsvariablen $x_k = a, a+\Delta x, a+2\Delta x, \ldots b-\Delta x$ werden die Integrationsgrenzen a und b, und aus Δx wird dx.

Jedoch lässt sich der Grenzübergang für die Summe $\sum_{x_k=a}^{b-\Delta x} f(x_k)\cdot\Delta x$ nicht ohne Weiteres durchführen.

Setzt man hierin einfach $\Delta x = 0$, wird der ganze Ausdruck zu null, was aber offensichtlich nicht richtig ist. Man muss eine konkrete Funktion für $f(x_k)$ einsetzen, diese explizit summieren und dann in der Summenformel den Grenzübergang durchführen.[6] Einfacher ist aber ein anderer Weg.[7]

Es wird betrachtet, wie sich die Fläche eines bestimmten Integrals verändert, wenn die Integrationsobergrenze verändert wird. Um die Veränderlichkeit anzuzeigen, nennt sie dann nicht mehr b, sondern x_0, wobei x_0 ein beliebiger Wert von allen möglichen Werten für x ist.

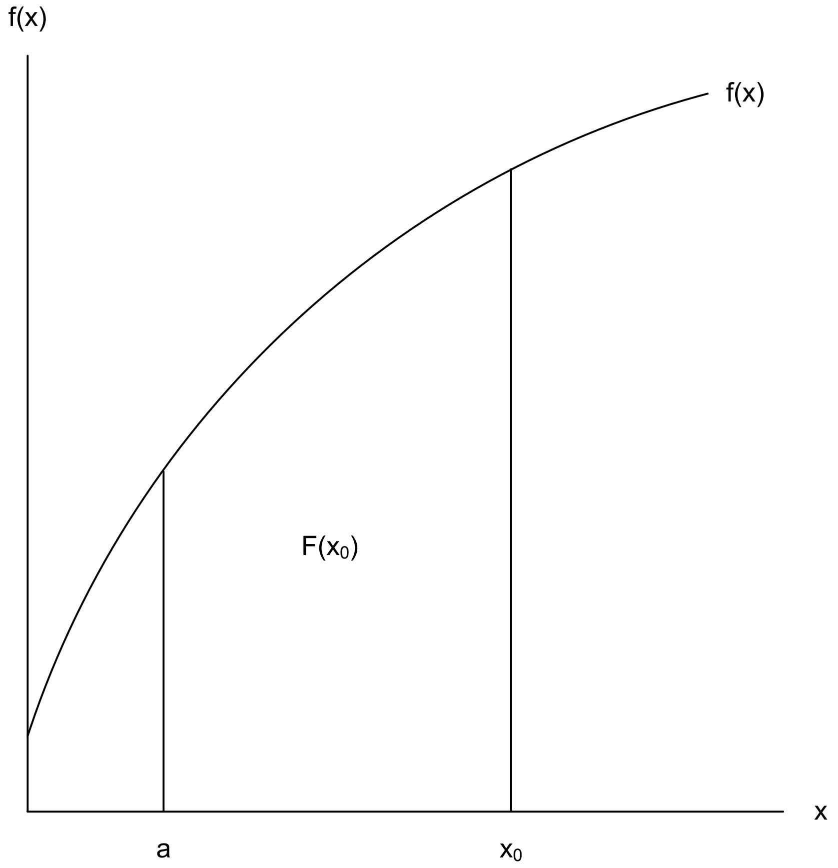
Mit $F(x)$ für die von der Funktion $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = x_0$ eingeschlossene Fläche ergibt sich folgende Situation als Ausgangspunkt:

---

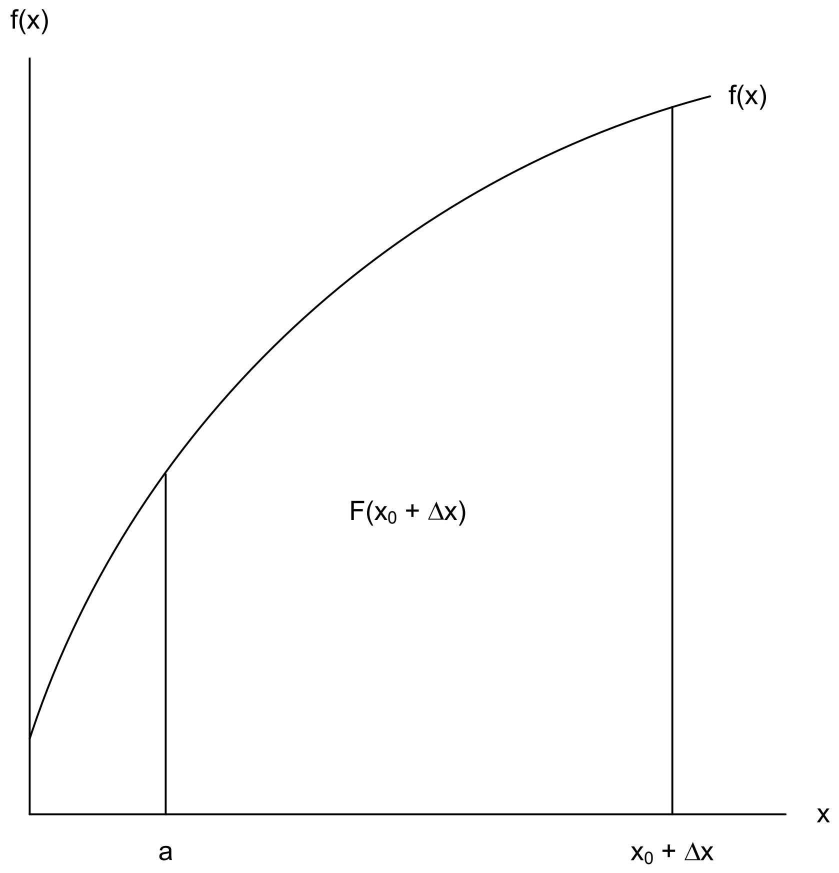
[5] Hierfür ist auch die Bezeichnung als *Riemansches Integral* oder *Riemann-Integral* gebräuchlich, vgl. z.B. I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig, Taschenbuch der Mathematik, 7. Aufl. Frankfurt/M 2008, S. 497

[6] Durchgerechnete Beispiele finden sich bei M. Merz, M.V. Wüthrich, Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler – Die Einführung mit vielen ökonomischen Beispielen, München 2013, S. 539 ff.

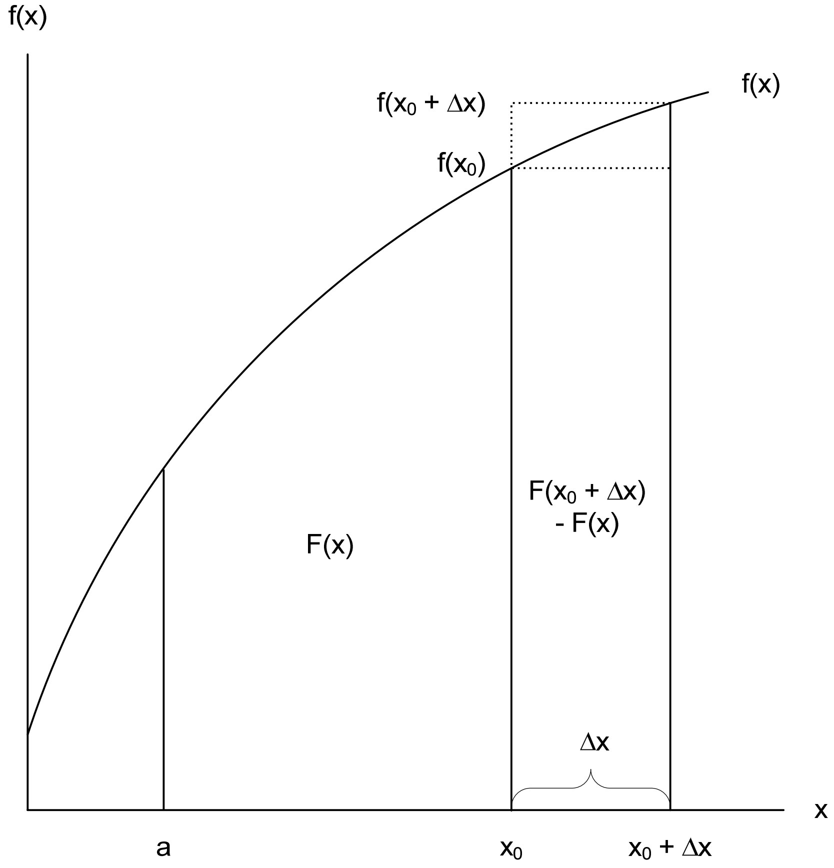
[7] Beweisführung nach J. Tietze, Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik, 5. Aufl. Braunschweig / Wiesbaden 1995, S. 8-13 f.



Der Bereich, für den die eingeschlossene Fläche zu berechnen ist, wird um Δx vergrößert:



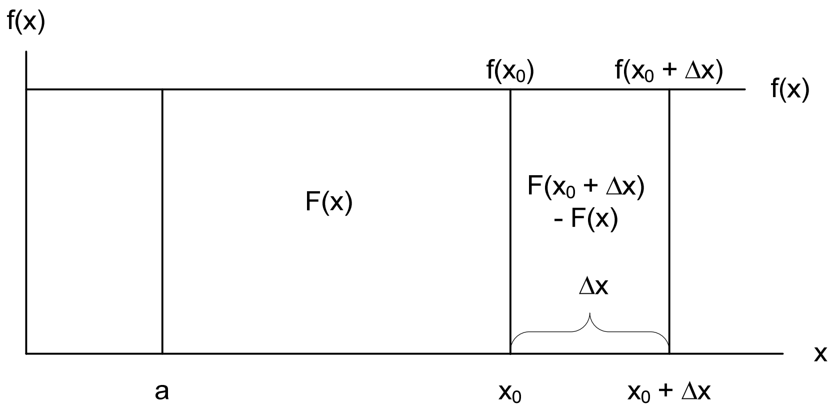
Was ist hinzugekommen, wie lässt sich die Differenz der Flächen darstellen?



Die richtige zusätzliche Fläche unter $f(x)$ ist $F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$. Die Fläche des hinzugekommenen Rechtecks $(x_0, 0)$, $[x_0, f(x_0)]$, $[x_0 + \Delta x, f(x_0)]$, $(x_0 + \Delta x, 0)$ ist zu klein, und die Fläche des Rechtecks $(x_0, 0)$, $[x_0, f(x_0 + \Delta x)]$, $[x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)]$, $(x_0 + \Delta x, 0)$ ist zu groß. Es lässt sich aufgrund der obigen Grafik also folgende Ungleichung aufstellen:

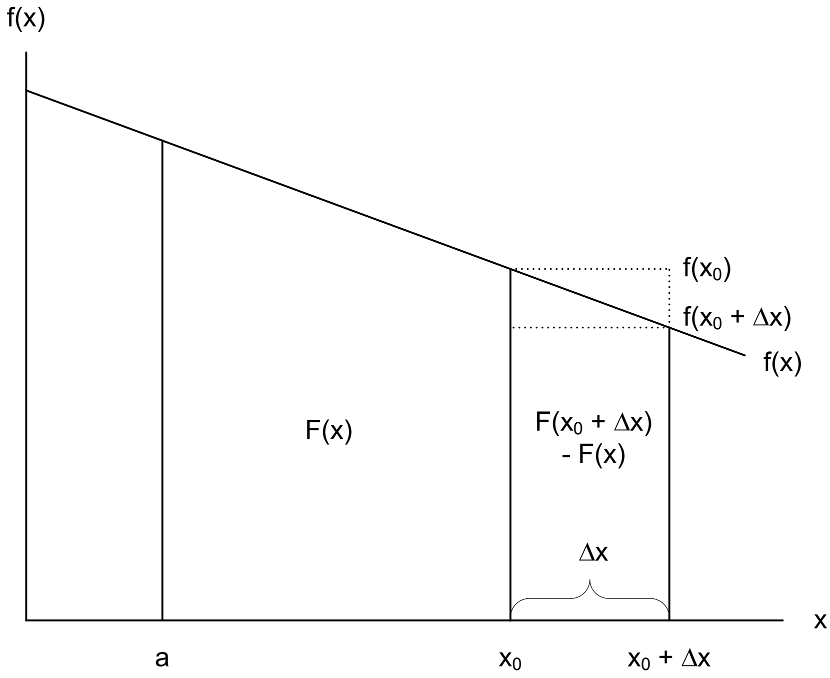
$$f(x_0) \cdot \Delta x < F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) < f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x$$

Es ist aber auch möglich, dass die Flächen von vorneherein einander gleich sind. Dies ist dann der Fall, wenn die Funktion $f(x)$ eine Parallele zur x-Achse darstellt. Dann ist $f(x_0) = f(x_0 + \Delta x)$ und $f(x_0) \cdot \Delta x$ stellt unmittelbar die hinzukommende Fläche dar:



Der Fall $f(x_0)\cdot\Delta x = F(x_0+\Delta x) - F(x_0) = f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$ ist also möglich.

Wenn die Steigung der Funktion negativ ist, wird $f(x_0+\Delta x)$ kleiner als $f(x_0)$ und die Operatoren in der Ungleichung kehren sich um:



In diesem Fall gilt $f(x_0)\cdot\Delta x > F(x_0+\Delta x) - F(x_0) > f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$.

Welche der Ungleichungen zum Ausgangspunkt der weiteren Untersuchung gemacht wird, ist gleichgültig, da es ohnehin das Ziel ist, die Ungleichung zu einer Gleichung zu machen, indem Δx gegen null geht. In jedem Fall muss der mögliche Fall, dass die drei Flächen einander gleich sind, aufgenommen werden. Somit wird von folgender Ungleichung ausgegangen:

$$f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x) - F(x_0) \le f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$$

Die Ungleichung wird durch Δx geteilt:

$$f(x_0) \le \frac{F(x_0+\Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} \le f(x_0+\Delta x)$$

Wenn Δx gegen null geht, wird in diesem Ausdruck $f(x_0+\Delta x)$ zu $f(x)$ und der Differenzenquotient $\frac{F(x_o+\Delta x) - F(x_0)}{\Delta x}$ wird zum Differenzialquotienten:

$$f(x_0) \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x_0+\Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} \le f(x_0)$$

Da x_0 beliebig sein kann, lässt sich in diesem Ausdruck x_0 durch x ersetzen:

$$f(x) \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \le f(x)$$

Der Differenzialquotient ist damit eine Funktion, für die $\frac{dF(x)}{dx}$ oder $F'(x)$ geschrieben werden kann:

$$f(x) \le F'(x) \le f(x)$$

$F'(x)$ soll also größer oder gleich $f(x)$ sein, zugleich aber auch kleiner oder gleich $f(x)$. Eine Größe kann aber nicht gleichzeitig größer und kleiner als eine andere sein. Nur die Gleichheitsbedingung kann erfüllt werden. Also gilt

$$f(x) = F'(x)$$

Das heißt:

Die erste Ableitung der Fläche $F(x)$ ist die Funktion $f(x)$. Dieser Zusammenhang ist bekannt als der erste Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.

Anders ausgedrückt:

Die Fläche $F(x)$ ist das Integral zu $f(x)$.

Damit ist das Problem der Flächenbestimmung unter $f(x)$ grundsätzlich gelöst. Die Fläche zwischen $x = a$ und irgendeinem x ist das bestimmte Integral zu $f(x)$:

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

oder

$$\int_a^x f(x)dx = F(x)$$

Zur Probe: Die erste Ableitung dieser Gleichung ergibt wieder die Identität $f(x) = F'(x)$.

Nun wissen wir aber, dass eine Konstante beim Ableiten fortfällt. Auch die Ableitung von $F(x) + C$ ergibt die Identität $f(x) = F'(x)$. Es gilt also

(1) $$\int_a^x f(x)dx = F(x) + C$$

Wiederum zur Probe: Die erste Ableitung von Gleichung (1) ist $f(x) = F'(x)$.

$F(x) + C$ ist die Menge aller Stammfunktionen zu $F'(x)$, das ist das unbestimmte Integral. Die Unbestimmtheit kommt in der Größe von C zum Ausdruck.

Jedoch kann die Konstante C bestimmt werden, wenn die Integrationsgrenzen vorgegeben sind.[8] Es gilt nämlich für $x = a$ nach Gleichung (1)

(2) $$\int_a^a f(x)dx = F(a) + C$$

Nun ist $\int_a^x f(x)dx$ die Fläche zwischen der unteren Integrationsgrenze a und der oberen Integrationsgrenze x. Wenn aber die obere Integrationsgrenze mit der unteren übereinstimmt, dann ist die ein-

[8] Zum folgenden Beweis vgl. J. Tietze, Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik, 5. Aufl. Braunschweig / Wiesbaden 1995, S. 8-15 f.

geschlossene Fläche gleich null. Über einem Punkt kann man nur eine Gerade zeichnen, aber keine Fläche. Es gilt also

(3) $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Gleichung (3) in Gleichung (2) eingesetzt:

$$0 = F(a) + C$$

Hieraus folgt

(4) $$C = -F(a)$$

Gleichung (4) kann folgendermaßen interpretiert werden: Zu bestimmen ist ja die *zusätzliche* Fläche, die ab der unteren Integrationsgrenze von der Funktion f(x) eingeschlossen wird. Diese zusätzliche Fläche ist bei der unteren Integrationsgrenze null. Wenn die Funktion F(x) bei $x = a$ einen anderen Wert als null aufweist, nämlich irgendeinen konstanten (und damit von x unabhängigen) Wert C, dann ist diese bereits vorhandene Fläche F(a) abzuziehen, damit die Fläche zu Beginn der Integration auf null kommt.

Gleichung (4) in Gleichung (1) eingesetzt:

(5) $$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)$$

Setzt man hierin $x = b$ ein, so erhält man das bestimmte Integral:

(6) $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

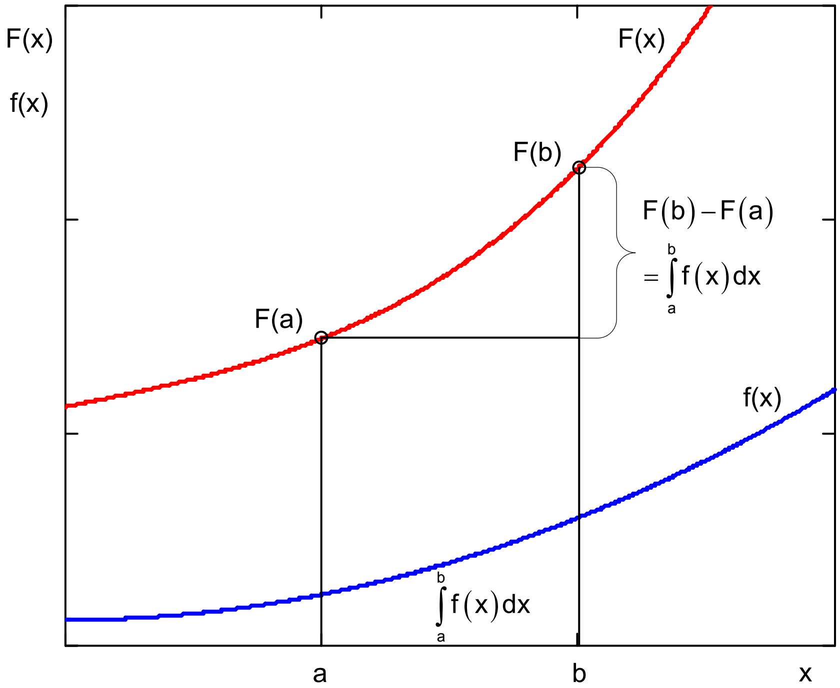
Dies ist der zweite Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Die Fläche unter der Funktion f(x) zwischen den Grenzen a und b wird gegeben durch die Differenz der Stammfunktion für die Integrationsgrenzen.

Auf die Integrationskonstante kommt es dabei nicht an. Addiert man diese bei F(b), so zieht man sie bei F(a) wieder ab, sodass der Einfluss der Integrationskonstanten per Saldo null ist:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) + C - \left[F(a) + C\right] = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$$

Der zweite Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung vereinfacht es entscheidend, die Fläche unter einer gegebenen Funktion f(x) zu ermitteln. Statt diese Fläche über eine Zerlegung in Rechtecke und einen Grenzübergang zu unendlich vielen Rechtecken zu bestimmen, berechnet man nach dem zweiten Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung einfach die Stammfunktion ohne Integrationskonstante, setzt hierin die obere Integrationsgrenze ein und zieht davon den Wert der Stammfunktion für die untere Integrationsgrenze ab. So hat man die Prozedur einer Flächenbestimmung durch eine bloße Subtraktion ersetzt.

Den Unterschied sieht man am besten in einer Grafik, in die sowohl f(x) als auch F(x) eingezeichnet sind:



Dem Mathematikprogramm ist die Art der Flächenermittlung gleichgültig, wie das folgende Beispiel zeigt.

$f(x) := 3x^2 - 24x + 60$	Integrand
$a := 6$	Untere Integrationsgrenze
$b := 8$	Obere Integrationsgrenze
$\int_a^b f(x)\,dx = 80$	Bestimmtes Integral
$F(x) := \int f(x)\,dx \rightarrow x^3 - 12\cdot x^2 + 60\cdot x$	Stammfunktion
$F(b) - F(a) = 80$	Bestimmtes Integral

16. Aufgaben und Lösungen

Aufgaben

http://www.klaus-gach.de/dateien/mathe/mathe02.doc
http://www.klaus-gach.de/dateien/mathe/mathe02.pdf

Lösungen dazu

http://www.klaus-gach.de/dateien/mathe/mathe03.doc
http://www.klaus-gach.de/dateien/mathe/mathe03.pdf
http://www.klaus-gach.de/dateien/mathe/mathe04.xmcd
http://www.klaus-gach.de/dateien/mathe/mathe04.pdf