Warum ein Zahlendreher in einer Summe zu einer Differenz führt, die ohne Rest durch 9 teilbar ist.

Vor der Erfindung des Computers waren Buchhalter bisweilen gezwungen, lange Zahlenkolonnen zu addieren, um die Gleichheit von Soll und Haben zu überprüfen. Auch bei Verwendung einer Rechenmaschine gab dies bei zweimaligem Rechnen in der Regel zwei unterschiedliche Ergebnisse.

Um den Fehler möglichst schnell zu finden, zieht der Buchhalter zunächst einmal die Differenz zwischen den beiden Summen und teilt diese durch 9. Lässt sich die Differenz ohne Rest durch 9 teilen, vermutet der Buchhalter sofort: Ein Zahlendreher.

Die deutsche Sprache ist für Zahlendreher sehr anfällig. Man möchte 39 eingeben und denkt neun und dreißig – schon hat man als Erstes die 9 eingegeben und dann die 3. So wird aus der Zahl 39 die Zahl 93. Die Differenz zwischen diesen beiden Zahlen ist 54, und 54 ist ohne Rest durch 9 teilbar.

Dass dies für jeden Zahlendreher gilt, sei im Folgenden gezeigt.

Es ist zunächst klar, dass eine Verdrehung von Ziffern in einer Zahl nur dann eine Bedeutung haben kann, wenn die Stellung der Ziffern in der Zahl etwas bedeutet. Man kann natürlich 39 senkrechte Striche machen, um die Zahl 39 darzustellen; aber dass dies unzweckmäßig ist, hat die Menschheit schon früh gelernt. Man kam früh darauf, die Elemente von Zahlen zu bündeln und nur noch die Bündel zu zählen.

In unserem dekadischen Zahlensystem bildet die 10 das Bündel. Alle reellen Zahlen können mit den zehn Ziffern 0 bis 9 dargestellt werden. Die Wertigkeit der Ziffern vor dem Komma steigt von Stelle zu Stelle jeweils um das 10-Fache. Die Wertigkeit der Ziffern nach dem Komma ist jeweils ein Zehntel der vorherigen Stelle.

Somit lassen sich die Wertigkeiten der Stellen im dekadischen Zahlensystem durch Zehnerpotenzen darstellen. Die Wertigkeit der ersten Stelle vor dem Komma ist 10^0, die der zweiten 10^1, und so weiter. Die Wertigkeit der ersten Stelle nach dem Komma ist 10^{-1}, die der zweiten 10^{-2}, und so weiter. Insgesamt ergibt sich für die Wertigkeiten der Stellen einer Zahl:

...	10^3	10^2	10^1	10^0	,	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	...
	Wert der vierten Stelle vor dem Komma	Wert der dritten Stelle vor dem Komma	Wert der zweiten Stelle vor dem Komma	Wert der ersten Stelle vor dem Komma		Wert der ersten Stelle nach dem Komma	Wert der zweiten Stelle nach dem Komma	Wert der dritten Stelle nach dem Komma	Wert der vierten Stelle nach dem Komma	

Um den gesamten Wert einer Zahl zu erhalten, werden diese Stellenwerte mit der passenden Ziffer multipliziert. So ist die Zahl 10 selbst folgendermaßen konstruiert:

$$1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 = 10$$

Die größte auf diese Weise mit zwei Ziffern darstellbare Zahl ist 99:

$$9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 = 99$$

Für die Zahl 4.123,75 gilt:

$$4 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} = 4.123{,}75$$

Allgemein bestimmt sich der Wert einer Ziffer a in einer Zahl durch Multiplikation der Ziffer mit der Wertigkeit ihrer Stelle. Bezeichnet man die Wertigkeit einer Stelle allgemein als W, so ist der Wert der ersten Stelle vor dem Komma $W = 10^0$, der Wert der zweiten Stelle $W = 10^1$, der Wert der dritten Stelle $W = 10^2$, und so weiter.

Warum ein Zahlendreher in einer Summe zu einer Differenz führt, die ohne Rest durch 9 teilbar ist.

Für zwei nebeneinanderstehende Ziffern *a* und *b* gilt dann, dass die Wertigkeit von *a* das Zehnfache der Wertigkeit von *b* beträgt, wenn *a* links von *b* steht. Der Wert, den die Ziffern *ab* zu irgendeiner Zahl beitragen, ist also

(1) $$a \cdot 10 \cdot W + b \cdot W$$

Werden nun die Ziffern *a* und *b* durch einen Zahlendreher vertauscht, dann erhält *a* die Wertigkeit von *b*, und *b* die Wertigkeit von *a*. Der Wert, mit dem die Ziffern *ba* zu der Zahl beitragen, ist also

(2) $$b \cdot 10 \cdot W + a \cdot W$$

Die Differenz beider Beträge ist

(3) $$\Delta = a \cdot 10 \cdot W + b \cdot W - (b \cdot 10 \cdot W + a \cdot W)$$

Hieraus folgt

$$\Delta = a \cdot 10 \cdot W + b \cdot W - b \cdot 10 \cdot W - a \cdot W$$

$$\Delta = 9 \cdot a \cdot W - 9 \cdot b \cdot W$$

(4) $$\Delta = 9 \cdot (a - b) \cdot W$$

Gleichung (4) gilt für beliebige Werte von *W*, solange es sich um Potenzen von 10 mit einem ganzzahligen Exponenten handelt, wozu aber auch negative Exponenten gehören. Hiermit werden, wie oben gezeigt, die Stellen einer Zahl nach dem Komma dargestellt. Jedoch interessieren sich die Buchhalter nicht für Differenzen aus Zahlendrehern nach dem Komma; die buchen sie aus. Und, wenn ein Zahlendreher zu einer Differenz führen soll, die ohne Rest durch 9 teilbar ist, so ist die Teilbarkeit von Zahlen eine Eigenschaft, die auch nur für ganze Zahlen untersucht wird.

Als Zahlendreher wird deswegen nur das Vertauschen von zwei Ziffern *vor* dem Komma betrachtet. Das heißt, die betrachtete Zahl muss mindestens zweistellig sein, sonst kann es keinen Zahlendreher geben. Unter dieser Voraussetzung ist der kleinste Wert von *W* der Wert für die erste Stelle vor dem Komma, $W = 10^0 = 1$, eine ganze Zahl. Die weiteren Stellen mit der Wertigkeit 10^1, 10^2 usw. sind ebenfalls ganzzahlig. Die Größe *W* in Gleichung (4) ist somit ganzzahlig.

Die Ausdrücke *a* und *b* in Gleichung (4) sind Ziffern des dekadischen Zahlensystems, die nur die ganzzahligen Werte von 0 bis 9 annehmen können. Die Differenz *a* – *b* ist dann ebenfalls ganzzahlig. Die Multiplikation der ganzen Zahl (*a* – *b*) mit der ganzen Zahl *W* ergibt wiederum eine ganze Zahl, sodass man für die Differenz gemäß Gleichung (4) auch schreiben kann:

(5) $$\Delta = 9 \cdot \text{Ganze Zahl}$$

Hieraus folgt

(6) $$\frac{\Delta}{9} = \text{Ganze Zahl}$$

Die durch einen Zahlendreher entstandene Differenz Δ ergibt, durch 9 geteilt, eine ganze Zahl. Das ist eine Zahl ohne Rest. Damit ist die aufgestellte Behauptung bewiesen.