Normalverteilung für den Gesamtschaden eines Versicherungsunternehmens

$s := 100$ Schaden eines Versicherungsnehmers, wenn der Schadenfall eintritt

$w_S := 0.1$ Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Schadenfall eintritt

$n := 40$ Anzahl der Versicherungsnehmer

$S := 0 .. n \cdot s$ Mögliche Ausprägungen des Gesamtschadens des Versicherungsunternehmens

$\mu := n \cdot w_S \cdot s$ Erwartungswert des Gesamtschadens des Versicherungsunternehmens

$\mu = 400$

$\sigma := s \cdot \sqrt{n \cdot w_S \cdot (1 - w_S)}$ Standardabweichung des Gesamtschadens des Versicherungsunternehmens

$\sigma = 189.737$

$$f(S) := \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-0.5 \cdot \left(\frac{S-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Normalverteilung für den Gesamtschaden des Versicherungsunternehmens [Dichtefunktion]

$$F(S) := \int_0^S f(S)\, dS$$

Verteilungsfunktion für den Gesamtschaden des Versicherungsunternehmens

Die Höhe von f(S) stellt nicht die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines bestimmten Wertes von S dar. Da die Normalverteilung eine stetige Funktion ist, ist die Anzahl der möglichen Werte für die Zufallsvariable überabzählbar unendlich. *Ein* bestimmter Wert von S ist einer von unendlich vielen möglichen Fällen, und dessen Wahrscheinlichkeit ist null.

Die Funktionswerte einer Dichtefunktion sind ein Maß für die Konzentration von Wahrscheinlichkeiten (daher der Name "Dichtefunktion" oder auch "Wahrscheinlichkeitsdichte"). Aus ihnen lassen sich die Wahrscheinlichkeiten dafür bestimmen, dass die Zufallsvariable in einem bestimmten Intervall liegt. Diese Wahrscheinlichkeit wird gegeben durch die Fläche unter der Dichtefunktion zwischen den Intervallgrenzen, also durch das Integral.

Das größtmögliche Intervall liegt zwischen $-\infty$ und ∞. Eines dieser Ereignisse wird mit Sicherheit eintreten, sodass die Fläche unter der Dichtefunktion 1 ist. Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(S)\, dS = 1$$

Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Gesamtschaden des Versicherungsunternehmens zwischen $-\infty$ und ∞ liegt

Tatsächlich kann der Gesamtschaden aber nicht unter 0 und nicht über $n \cdot s = 4000$ liegen. Um die Wahrscheinlichkeiten für andere Intervalle zu bestimmen, braucht man nur die Intervallgrenzen als obere und untere Integrationsgrenze einzugeben. Zum Beispiel ist die Wahrscheinlicheit, dass S zwischen 350 und 450 liegt (wobei wegen der Stetigkeit der Funktion die Grenzwerte eingeschlossen sind):

$$\int_{350}^{450} f(S)\, dS = 0.207853$$

Da die Verteilungsfunktion eine Stammfunktion zur Dichtefunktion ist, erhält man die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Intervall nicht nur als Fläche unter der Funktion f(S), sondern auch als die Differenz der Stammfunktion bei der oberen und der unteren Integrationsgrenze:

$F(450) - F(350) = 0.207853$

Normalverteilung für den Gesamtschaden eines Versicherungsunternehmens

Grafisch ergibt sich: