# Der Risikoausgleich im Kollektiv

Für das Modell einer Schadenversicherung sei von folgenden Daten ausgegangen:

$m := 40$ Maximale Anzahl der Versicherungsnehmer

$n := 1 .. m$ Anzahl der Versicherungsnehmer

$s := 100$ Schaden eines Versicherungsnehmers, wenn der Schadenfall eintritt

$w_s := 0.1$ Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Schadenfall eintritt

Unter der Voraussetzung, dass der Schaden bei einem jeden Versicherungsnehmer im betrachteten Zeitraum entweder s oder null ist, und unter der weiteren Voraussetzung, dass der Eintritt des Schadens bei einem Versicherungsnehmer unabhängig vom Schadeneintritt bei allen anderen Versicherungsnehmern ist, gilt für den Erwartungswert und die Varianz des Gesamtschadens:

$\mu(n) := n \cdot s \cdot w_s$ Erwartungswert des Gesamtschadens

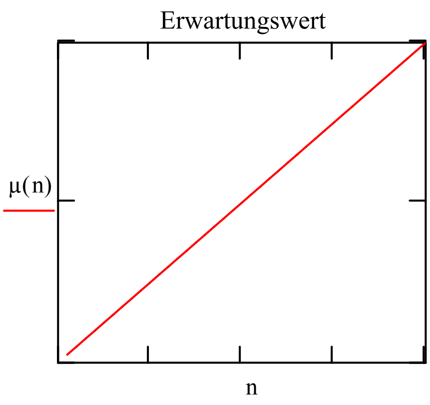
$\mathrm{Var}(n) := n \cdot s^2 \cdot w_s \cdot (1 - w_s)$ Varianz des Gesamtschadens

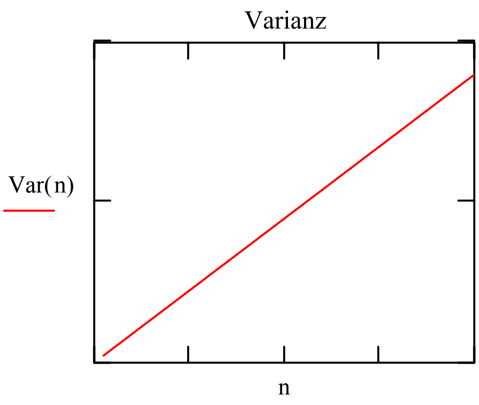
Außerdem gilt:

$\sigma(n) := \sqrt{\mathrm{Var}(n)}$ Standardabweichung des Gesamtschadens

$V(n) := \dfrac{\sigma(n)}{\mu(n)}$ Variationskoeffizient des Gesamtschadens

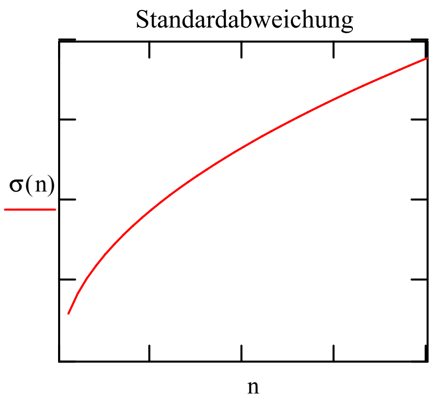
Wenn die Anzahl der Versicherungsnehmer schrittweise von 1 auf m erhöht wird, steigt der Erwartungswert des Gesamtschadens mit jedem Versicherungsnehmer um den Erwartungswert seines Einzelschadens. Ebenso steigt die Varianz des Gesamtschadens um die Varianz des hinzukommenden Einzelschadens. Der Erwartungswert des Gesamtschadens und die Varianz des Gesamtschadens sind also lineare Funktionen in Abhängigkeit von der Anzahl der Versicherungsnehmer:

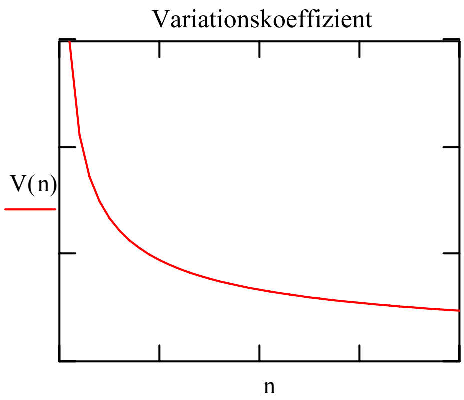



Dagegen steigt die Standardabweichung des Gesamtschadens unterproportional an und der Variationskoeffizient sinkt, wenn die Anzahl der Versicherungsnehmer erhöht wird. Diesen Effekt bezeichnet man als Risikoausgleich im Kollektiv.

## Der Risikoausgleich im Kollektiv




Beispielhaft ergeben sich folgende Werte:

| n = | μ(n) = | Var(n) = | σ(n) = | V(n) = |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 900 | 30.00 | 3.000 |
| 2 | 20 | 1800 | 42.43 | 2.121 |
| 3 | 30 | 2700 | 51.96 | 1.732 |
| 4 | 40 | 3600 | 60.00 | 1.500 |
| 5 | 50 | 4500 | 67.08 | 1.342 |
| 6 | 60 | 5400 | 73.48 | 1.225 |
| 7 | 70 | 6300 | 79.37 | 1.134 |
| 8 | 80 | 7200 | 84.85 | 1.061 |
| 9 | 90 | 8100 | 90.00 | 1.000 |
| 10 | 100 | 9000 | 94.87 | 0.949 |

$m = 40$ $\mu(m) = 400$ $\mathrm{Var}(m) = 36000$ $\sigma(m) = 189.74$ $V(m) = 0.474$

Durch die Verwendung eines Risikomaßes, der Standardabweichung des Gesamtschadens der Versicherungsunternehmung, ist es nicht notwendig, das Risiko genau zu definieren. Mit einem höheren oder einem niedrigeren Risiko verbindet man in jedem Fall die Vorstellung, dass man der Unsicherheit zukünftiger Entwicklungen mehr oder weniger ausgesetzt ist, und eben das kann man mit der Standard-abweichung als Risikomaß vergleichbar machen.

Die Standardabweichung ist nun aber ein Maß für das Risiko, kein Prognosewert für das tatsächliche Eintreten von Schäden. Es wäre falsch sich vorzustellen, dass einmal der Schaden $\mu$ eintritt, das nächste Mal der Schaden $\mu + \sigma$, das übernächste Mal, oder vielleicht doch erst das überübernächste Mal der Schaden $\mu - \sigma$, und so weiter. Dass dem nicht so ist, erkennt man am besten am allereinfachsten Fall, wenn die Versicherungsunternehmung nur einen einzigen Versicherungsnehmer hat. In diesem Fall gilt

$\mu(1) = 10$

$\sigma(1) = 30$

Der Schaden ist nun entweder $s = 100$ oder null. Die Fälle

$\mu(1) = 10$

$\mu(1) + \sigma(1) = 40$

$\mu(1) - \sigma(1) = -20$

können bei einem einzelnen Versicherungsnehmer überhaupt nicht auftreten.

## Der Risikoausgleich im Kollektiv

Die Standardabweichung kann nur als Maß des Risikos für die Übernahme einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung durch die Versicherungsunternehmung betrachtet werden, nicht als Prognose für den tatsächlichen Eintritt des Schadens. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist kein Prognoseverfahren.

Zum Vergleich wird folgende Situation betrachtet: Der Einzelschaden sei

$$s := 1$$

und die Anzahl der Versicherungsnehmer

$$n := 100$$

Dann ist der Erwartungswert des Gesamtschadens

$$n \cdot s \cdot w_s = 10$$

und die Standardabweichung des Gesamtschadens

$$s \cdot \sqrt{n \cdot w_s \cdot \left(1 - w_s\right)} = 3$$

Bei gleichem Erwartungswert ist die Standardabweichung also deutlich niedriger, womit diese Wahrscheinlichkeitsverteilung ein niedrigeres Risiko aufweist. Es leuchtet auch intuitiv ein, dass es für eine Versicherungsunternehmung gefährlicher ist, nur einen Versicherungsnehmer zu haben, der möglicherweise einen Großschaden verursacht, als wenn man eine Vielzahl von Versicherungsnehmern hat, die nur kleinere Schäden verursachen. Dann treibt einen der Schadeneintritt bei einem Versicherungsnehmer nicht gleich in die Insolvenz, sondern man kann den Schaden eher verkraften, weil der Schadeneintritt bei einem Versicherungsnehmer durch den Nichteintritt des Schadens bei anderen aufgewogen wird. Eben dies meint man mit dem Risikoausgleich im Kollektiv.

Der Risikoausgleich im Kollektiv lässt sich nicht, wie es manchmal getan wird, durch das statistische Gesetz der großen Zahl und auch nicht durch den zentralen Grenzwertsatz der Statistik begründen. Beide Sätze machen Aussagen über die tatsächlichen Ergebnisse von Zufallsprozessen, die man bei der Beurteilung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen nach dem Risikoausgleich im Kollektiv noch gar nicht kennt. Dennoch sind die beiden Sätze für die Versicherungen von Bedeutung.

Grenzwertsätze befassen sich mit dem Zusammenhang von Wahrscheinlichkeitsverteilungen. So gilt für die hier dargestellte Modellversicherung eine Binomialverteilung. Diese wird für $n = 1$ und $s = 1$ zu einer Bernoulli-Verteilung. Für größere Werte von n dagegen kann die Binomialverteilung nach dem zentralen Grenzwertsatz durch eine Normalverteilung angenähert werden.

Das Gesetz der großen Zahl (oder, wenn man "la loi des grands nombres" wörtlich übersetzt, das Gesetz der großen Zahlen), stellt einen empirisch häufig zu beobachtenden und intuitiv einleuchtenden Zusammenhang dar: Führt man ein Zufallsexperiment mehrere Male durch, nähert sich erfahrungsgemäß das durchschnittliche tatsächliche Ergebnis dem Erwartungswert der Wahrscheinlichkeitsverteilung dieses Zufallsexperimentes immer mehr an, je häufiger das Experiment durchgeführt wird. Da es aber auch immer eine, wenn auch noch so kleine Wahrscheinlichkeit dafür gibt, dass dem zufälligerweise nicht so ist, darf man als Statistiker nur sagen: Die Wahrscheinlichkeit, dass das durchschnittliche Ergebnis eines Zufallsprozesses von seinem Erwartungswert abweicht, wird umso kleiner, je größer die Anzahl der Wiederholungen des Zufallsprozesses ist.

Für den Gesamtschaden eines Versicherungsunternehmens bedeutet dies, dass sich der durchschnittliche tatsächliche Gesamtschaden im Laufe der Schadenjahre an den Erwartungswert des Gesamtschadens annähert. Diese Zusammenhang ist auch als "Risikoausgleich in der Zeit" bekannt.

Angewendet auf den Einzelschaden besagt das Gesetz der großen Zahl, dass sich der durchschnittliche tatsächliche  Schaden eines Versicherungsnehmers an den Erwartungswert des Einzelschadens umso mehr annähert, je mehr Versicherungsnehmer vorhanden sind. Auch nach dem Gesetz der großen Zahl ist es also günstig, einen großen Versichertenbestand zu haben.