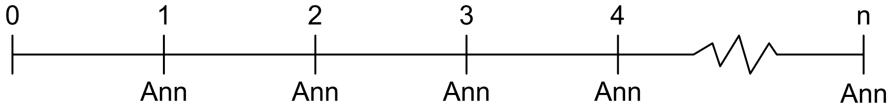
Was ist eine ewige Rente?

Gegeben sei folgende Rente in Form einer Annuität:



wobei:

Ann = Annuität
n = Laufzeit

Bei einem Kalkulationszinssatz von *i* ist der Barwert dieser Rente

(1) $$BW = Ann \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n} \qquad \text{für } i \neq 0 \text{ und } i \neq -1$$

Wenn es denn eine ewige Rente gibt, wie groß ist dann ihr Barwert?

Die Rente ist ewig, wenn ihre Laufzeit unendlich ist, wenn also *n* gegen unendlich geht. Um den Grenzübergang durchzuführen, wird die Formel für den Barwert umgestellt:

$$BW = \frac{Ann \cdot (1+i)^n}{i \cdot (1+i)^n} - \frac{Ann}{i \cdot (1+i)^n}$$

(2) $$BW = \frac{Ann}{i} - \frac{Ann}{i \cdot (1+i)^n}$$

Wenn *n* gegen unendlich geht und *i* größer als null ist, dann wird der Nenner des Bruchs $\frac{Ann}{i \cdot (1+i)^n}$ in Gleichung (2) immer größer und wächst über alle Grenzen, wenn *n* sich an die Unendlichkeit annähert. Da der Zähler *Ann* unverändert bleibt, nähert sich der Wert des Bruchs an null an. Es gilt also

(3) $$\lim_{n \to \infty} BW = \frac{Ann}{i} \qquad \text{für } i > 0$$

Der Barwert BW_E einer (nachschüssigen) ewigen Rente in Höhe von *Ann* ist also

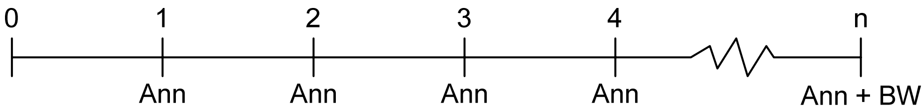
(4) $$BW_E = \frac{Ann}{i} \qquad \text{für } i > 0$$

Gibt es nun auch zeitlich begrenzte Renten, deren Barwert sich ähnlich einfach errechnen lässt wie der Barwert einer ewigen Rente nach Gleichung (4)?

Dazu muss man das Prinzip der ewigen Rente verallgemeinern. Es ist unmittelbar einsichtig, dass eine ewige Rente vorliegt, wenn die Laufzeit unendlich lang ist. Das bedeutet aber auch, dass in jedem Zeitpunkt, zu dem der Barwert dieser Rente ermittelt wird, noch eine unendliche Reihe von Zahlungen bevorsteht. Dies ändert sich im Zeitablauf nicht. Damit ändert sich auch der Barwert einer ewigen Rente im Zeitablauf nicht; der Barwert einer ewigen Rente bleibt immer gleich.

Die Bedingung, dass der Barwert sich im Zeitablauf nicht ändert, kann man auch für eine zeitlich begrenzte Rente setzen. Bei einer endlichen Rente mit dem Barwert *BW* gilt dann einfach, dass am Ende der Laufzeit zusätzlich zur Annuität eine Zahlung in Höhe von *BW* erfolgt. Diese Rente hat also folgende Form:

Was ist eine ewige Rente?



Für den Barwert dieser Rente gilt:

(5) $$BW = Ann \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n} + \frac{BW}{(1+i)^n}$$

Hieraus folgt:

$$BW - \frac{BW}{(1+i)^n} = Ann \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$$

$$BW \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n} = Ann \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$$

(6) $$BW = \frac{Ann}{i} \qquad \text{für } i \neq 0$$

Es ergibt sich also in der Tat die gleiche Formel wie für den Barwert einer ewigen Rente. Eine zeitlich begrenzte Rente, deren Barwert im Zeitablauf unverändert bleibt, hat den gleichen Barwert wie eine ewige Rente. Beiden ist gemeinsam, dass die Annuität keinen Tilgungsanteil enthält, sondern nur Zinsen auf ein gleichbleibendes Kapital:

(7) $$Ann = BW \cdot i$$

In beiden Fällen erfolgt während der Laufzeit keine Rückzahlung des Kapitals. Bei der ewigen Rente erfolgt sie nie, bei der zeitlich begrenzten Rente mit gleichbleibendem Barwert in einer Summe am Ende der Laufzeit.