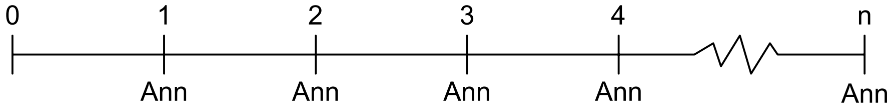
Barwertsummenfaktor und Kapitalwiedergewinnfaktor

Gegeben sei folgende Rente in Form einer Annuität:



wobei:

Ann = Annuität
n = Laufzeit

Bei einem Kalkulationszinssatz von i ist der Barwert dieser Rente

(1) $$BW = \frac{Ann}{1+i} + \frac{Ann}{(1+i)^2} \ldots + \frac{Ann}{(1+i)^{n-1}} + \frac{Ann}{(1+i)^n}$$

Da immer wieder derselbe Betrag Ann abgezinst wird, liegt es nahe, diese Bestimmungsgleichung des Barwertes zu vereinfachen. Tatsächlich handelt es sich bei BW um eine geometrische Reihe. Eine Reihe ist eine Summe von Zahlen (den Gliedern der Reihe), die nach einer bestimmten Regel gebildet wird. Bei einer geometrischen Reihe lautet die Regel, dass sich ein Glied aus dem vorhergehenden ergibt, indem das vorhergehende Glied mit einem konstanten Faktor multipliziert wird. Mit q für diesen die geometrische Reihe konstituierenden Faktor und a_i für das Glied i gilt

(2) $$a_{i+1} = a_i \cdot q$$

Um den konstituierenden Faktor aus einer bestehenden Reihe zu ermitteln, kann man zwei beliebige aufeinanderfolgende Glieder durcheinander teilen und erhält den Faktor als Quotienten, denn aus (2) folgt

(3) $$q = \frac{a_{i+1}}{a_i}$$

Dies auf die beiden ersten Glieder des Barwertes angewandt:

$$\frac{Ann}{(1+i)^2} : \frac{Ann}{1+i} = \frac{Ann \cdot (1+i)}{(1+i)^2 \cdot Ann} = (1+i)^{-1} = \frac{1}{1+i}$$

Das Gleiche ergibt sich aus dem letzten und dem vorletzten Glied von Gleichung (1):

$$\frac{Ann}{(1+i)^n} : \frac{Ann}{(1+i)^{n-1}} = \frac{Ann \cdot (1+i)^{n-1}}{(1+i)^n \cdot Ann} = (1+i)^{-1} = \frac{1}{1+i}$$

Um eine geometrische Reihe zu summieren, wird diese mit dem konstituierenden Faktor multipliziert:

(4) $$BW \cdot \frac{1}{1+i} = \frac{Ann}{(1+i)^2} + \frac{Ann}{(1+i)^3} \ldots + \frac{Ann}{(1+i)^n} + \frac{Ann}{(1+i)^{n+1}}$$

Man erkennt, dass das erste Glied der Reihe (1) durch das Bildungsgesetz der geometrischen Reihe zum zweiten Glied dieser Reihe wird, aber durch die Multiplikation dieser Reihe mit dem konstituierenden Faktor auch zum ersten Glied der Reihe (4). Dieses ist also identisch mit dem zweiten Glied der Reihe (1).

Entsprechend wird das zweite Glied der Reihe (1) durch Multiplikation mit dem Faktor $\frac{1}{1+i}$ einerseits zum dritten Glied der Reihe (1) und andererseits zum zweiten Glied der Reihe (4), und so weiter.

Barwertsummenfaktor und Kapitalwiedergewinnfaktor

Ab dem zweiten Glied der Reihe BW sind alle Glieder von BW auch in $BW \cdot \frac{1}{1+i}$ enthalten. Nur das erste Glied von BW hat keine Entsprechung in $BW \cdot \frac{1}{1+i}$, da es ja mit $\frac{1}{1+i}$ multipliziert werden muss und erst damit zum ersten Glied der Reihe $BW \cdot \frac{1}{1+i}$ wird.

Das letzte Glied der Reihe BW, $\frac{Ann}{(1+i)^n}$, wird durch die Multiplikation mit $\frac{1}{1+i}$ zum letzten Glied der Reihe $BW \cdot \frac{1}{1+i}$, $\frac{Ann}{(1+i)^{n+1}}$. Dieses Element ist zwar in der Reihe $BW \cdot \frac{1}{1+i}$ enthalten, aber nicht in der Reihe BW, da diese Reihe eben mit dem letzten Glied $\frac{Ann}{(1+i)^n}$ endet.

Mit anderen Worten: Die beiden Reihen gemäß Gleichungen (1) und (4) enthalten dieselben Elemente, mit der Ausnahme, dass das erste Glied der Reihe BW nur in Gleichung (1) enthalten ist, und der Ausnahme, dass das letzte Glied der Reihe $BW \cdot \frac{1}{1+i}$ nur in Gleichung (4) enthalten ist.

Bildet man nun die Differenz der beiden Reihen, so fallen alle Glieder weg, bis auf die beiden, die nur in einer der Reihen enthalten sind, das Glied $\frac{Ann}{1+i}$ der Reihe BW und das Glied $\frac{Ann}{(1+i)^{n+1}}$ der Reihe $BW \cdot \frac{1}{1+i}$. Die Differenz der Gleichungen (1) und (4) ist also

$$BW - BW \cdot \frac{1}{1+i} = \frac{Ann}{1+i} - \frac{Ann}{(1+i)^{n+1}}$$

$$BW \cdot \left(1 - \frac{1}{1+i}\right) = \frac{Ann \cdot (1+i)^n - Ann}{(1+i)^{n+1}}$$

$$BW \cdot \frac{1+i-1}{1+i} = Ann \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n+1}}$$

$$BW \cdot \frac{i}{1+i} = Ann \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n+1}}$$

(5) $$BW = Ann \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n} \qquad \text{für } i \neq 0 \text{ und } i \neq -1$$

Der Faktor $\frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$ auf der rechten Seite von Gleichung (5), mit dem die Annuität multipliziert werden muss, um den Barwert aller Annuitäten zu erhalten, ist als Barwertsummenfaktor oder Rentenbarwertfaktor bekannt.

Für $i = 0$ und für $i = -1$ existiert der Barwertsummenfaktor nicht, da in diesen Fällen der Nenner des Faktors zu null wird und damit der Bruch nicht definiert ist. Dies ist auch ökonomisch zu erklären: Bei einem Zinssatz von 0 findet keine Verzinsung statt. Der Barwert aller zukünftigen Zahlungen ist gleich dem Zahlungsbetrag. Um den Barwert einer solchen nicht verzinsten Reihe zu ermitteln, müssen einfach nur die Glieder addiert, aber nicht abgezinst werden. Im Fall $i = -1$ ist das Kapital nach einem

Jahr vollständig verloren und kann in keiner Zukunft mehr verzinst werden. Es existiert keine Reihe von Annuitäten.

Stellt man Gleichung (5) nach der Annuität um, erhält man einen Faktor, mit dem der Barwert einer Reihe multipliziert werden kann und dann die Annuität ergibt:

(6) $$\text{Ann} = \text{BW} \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \qquad \text{für } i \neq 0$$

Der Faktor, mit dem man einen Barwert multipliziert, um die Annuität zu erhalten, wird Kapitalwiedergewinnfaktor genannt. Wie man sieht, ist der Kapitalwiedergewinnfaktor der Kehrwert des Barwertsummenfaktors.

Des Weiteren interessiert der Barwert einer Annuität, deren Laufzeit unendlich ist. Eine solche Annuität ist eine ewige Rente. Der Barwert einer ewigen Rente ergibt sich aus Gleichung (5), wenn n gegen unendlich geht. Um den Grenzübergang durchzuführen, wird der Bruch des Barwertsummenfaktors aufgelöst:

(7) $$\text{BW} = \text{Ann} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n} = \frac{\text{Ann} \cdot (1+i)^n}{i \cdot (1+i)^n} - \frac{\text{Ann}}{i \cdot (1+i)^n} = \frac{\text{Ann}}{i} - \frac{\text{Ann}}{i \cdot (1+i)^n}$$

Wenn i größer als null ist, dann bedeutet dies, dass bei einer Erhöhung von n der Ausdruck $(1+i)^n$ in $\frac{\text{Ann}}{i \cdot (1+i)^n}$ über alle Grenzen wächst, wenn n sich an die Unendlichkeit annähert. Da aber der Zähler Ann konstant bleibt, wird der Wert des Bruches immer kleiner und nähert sich an null an, je mehr sich n der Unendlichkeit annähert. Damit gilt für den Barwert einer ewigen Rente

(8) $$\text{BW} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{\text{Ann}}{i} - \frac{\text{Ann}}{i \cdot (1+i)^n} \right] = \frac{\text{Ann}}{i} \qquad \text{für } i > 0$$

Der Barwertsummenfaktor reduziert sich auf $\frac{1}{i}$. Der Barwert einer ewigen Rente ist also

(9) $$\text{BW} = \frac{\text{Ann}}{i} \qquad \text{für } i > 0$$

Die ewige Rente ergibt sich aus ihrem Barwert, indem dieser mit dem Zinssatz multipliziert wird, denn aus (9) folgt

(10) $$\text{Ann} = \text{BW} \cdot i \qquad \text{für } i > 0$$