Optimale Losgröße

Die optimale Lösgröße ist ein Problem der Serienfertigung, in der eine Anzahl gleichartiger Produkte (das Los, die Auflage, die Serie) hergestellt wird. Die fertigen Erzeugnisse werden während des Produktionszeitraums und danach ab Lager verkauft, bis das Lager erschöpft ist. Dann wird eine neue Serie in gleicher Höhe aufgelegt und der Prozess des Lageraufbaus und des Lagerabbaus beginnt von vorn. In jedem Fall ist der Zeitraum der Produktion kürzer als der Zeitraum des Verkaufs; sonst würde kein Lager benötigt.

Für jedes Los entstehen nun bestimmte Kosten, die sogenannten Rüstkosten, um die Produktion auf die jeweilige Serie vorzubereiten. Diese Kosten sind unabhängig von der Anzahl der zu fertigenden Produkte, sie sind unabhängig von der Losgröße. Die Rüstkosten insgesamt steigen proportional zur Anzahl der Lose im betrachteten Zeitraum. Um eine bestimmte vorgegebene Nachfrage in diesem Zeitraum zu befriedigen, müssen um so mehr Lose gefertigt werden, je geringer die Losgröße ist. Die Rüstkosten insgesamt sind umso höher, je geringer die Losgröße ist, und sie sind am kleinsten, wenn nur ein einziges Los gefertigt wird.

Jedoch müssen die Produkte bis zum Verkauf auf Lager gelegt werden und verursachen dadurch Lagerkosten, die pro Stück anfallen. Die Lagerkosten insgesamt sind am kleinsten, wenn möglichst wenige Produkte auf Lager gelegt werden, was bei einer möglichst geringen Losgröße der Fall ist. Mit einer Vergrößerung des Loses steigen dagegen die Lagerkosten, während die Rüstkosten insgesamt sinken. Die optimale Losgröße ist dann diejenige, bei der die Summe aus Rüstkosten und Lagerkosten minimal ist.

Beispielhaft sei eine Periode der Kostenrechnung betrachtet [1]:

$\text{Zeiteinheit} := \text{Jahr}$

$n := 1$	Länge des betrachteten Zeitraums [Periode]
$m := 180000$	Gesamtbedarf der Periode
$a := \frac{m}{n}$	Verminderung der Lagerbestandes pro Zeiteinheit
$z := 288000$	Erhöhung des Lagerbestandes pro Zeiteinheit
$x := 15000$	Losgröße

Man beachte, dass a und z nicht die Veränderung des Lagerbestandes in Mengeneinheiten darstellen, sondern die Veränderung pro Zeiteinheit. Beide Größen haben die Dimension Mengeneinheit [ME] pro Zeiteinheit [ZE]. Man könnte a auch als Geschwindigkeit des Lagerabbaus bezeichnen und z als Geschwindigkeit des Lageraufbaus. Die tatsächliche Veränderung des Lagerbestandes in Mengeneinheiten ergibt sich, indem diese Geschwindigkeit mit der Zeitdauer des Lagerauf- bzw. -abbaues multipliziert wird. Mit t für diese Zeit gilt:

$a\left[\frac{ME}{ZE}\right] \cdot t[ZE] = a \cdot t[ME]$ und entsprechend für z.

Es wird nun angenommen, dass sich die Geschwindigkeit des Lageraufbaus und -abbaus im betrachteten Zeitraum nicht ändert, sodass die Funktionen für den Lagerbestand eine konstante Steigung aufweisen und somit linear sind.

---

1) Beispiel und Notation nach: J. Tietze, Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik, 5. Aufl. Braunschweig / Wiesbaden 1995, S. 6-58 f.

Optimale Losgröße

Wird der Gesamtbedarf m in Lose mit der Größe x aufgeteilt, dann ist die Anzahl der hierfür erforderlichen Auflagen

$h := \frac{m}{x} = 12$ Anzahl der Auflagen

Während der Produktion mit der Geschwindigkeit z wird nun bereits mit der Geschwindigkeit a verkauft, sodass der Bestand in der Produktionsphase mit der Geschwindigkeit z - a steigt. Die Bestandsfunktion lautet damit:

$f(t) := (z - a) \cdot t$ Bestandsfunktion während der Produktionsphase

Beginnend im Zeitpunkt 0 endet die Produktionsphase, nachdem das gesamte Los produziert wurde. Mit t_1 für diesen Zeitpunkt gilt:

$t_1 := x = z \cdot t \;\left|\begin{array}{l}\text{auflösen}, t\\ \text{explizit}\end{array}\right. \rightarrow \frac{x}{z}$ Dauer einer Produktionsphase

Der maximale Bestand b_{max} ist erreicht, wenn die Produktion des Loses abgeschlossen ist, also im Zeitpunkt $t_1 := \frac{x}{z}$. Dies in die Bestandsfunktion eingesetzt ergibt:

$b_{max} := \left(1 - \frac{a}{z}\right) \cdot x$ Maximaler Bestand

Nachdem der maximale Bestand erreicht ist, verringert sich der Bestand mit der Geschwindigkeit a. Die Bestandsfunktion hat also die Steigung -a. Der Bestand ist 0, wenn das gesamte Los mit der Menge x aufgebraucht ist. Die Bestandsfunktion nach der Produktionsphase lautet also:

$g(t) := x - a \cdot t$ Bestandsfunktion nach der Produktionsphase

Der erste Zyklus ist beendet, wenn der Bestand auf 0 abgesunken ist, wenn also gilt g(t) = 0.

Mit t_2 für diesen Zeitpunkt ergibt sich:

$t_2 := x - a \cdot t = 0 \;\left|\begin{array}{l}\text{auflösen}, t\\ \text{explizit}\end{array}\right. \rightarrow \frac{x}{a}$ Dauer eines Zyklus

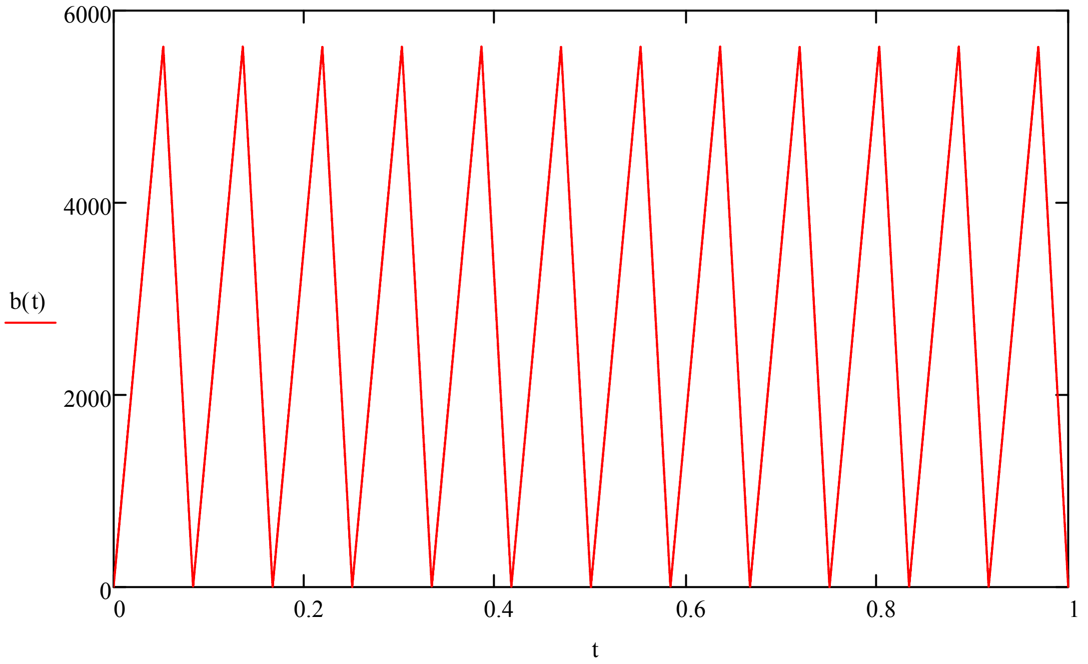
Die Bestandsfunktion b(t) setzt sich aus den Teilfunktionen f(t) und g(t) zusammen. Um mehrere Zyklen darzustellen, wird die Bestandsfunktion rekursiv formuliert, das heißt, die Funktion verweist auf sich selbst und wird in einer Schleife ausgeführt:

$$b(t) := \left|\begin{array}{l} f(t) \text{ if } t \le \frac{x}{z} \\ g(t) \text{ if } t \ge \frac{x}{z} \wedge t \le \frac{x}{a} \\ b\left(t - \frac{x}{a}\right) \text{ otherwise} \end{array}\right.$$

Bestandsfunktion

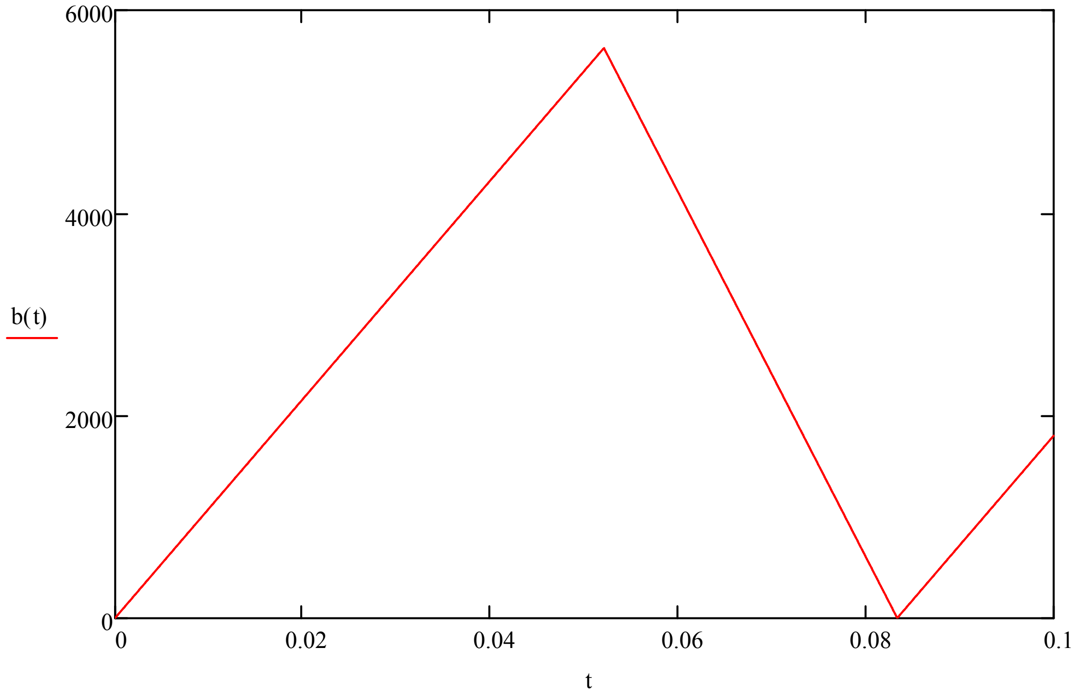
Optimale Losgröße

$t := 0, 0.0001 .. n$



Ein Teilzyklus vergrößert dargestellt:

$t := 0, 0.0001 .. 1.2 \frac{x}{a}$



Optimale Losgröße

Aus der Bestandsfunktion lässt sich als Grundlage für die Berechnung der Lagerkosten der durchschnittliche Lagerbestand ableiten. Für die hier vorliegende lineare Bestandsfunktion ist der durchschnittliche Bestand einfach die Hälfte des maximalen Bestandes:

$b_d := \frac{b_{max}}{2} = 2812.5$ Durchschnittlicher Lagerbestand

$$b_d := \left(1 - \frac{a}{z}\right) \cdot \frac{x}{2} = 2812.5$$

Allgemein gilt für die Ermittlung eines durchschnittlichen Bestandes, dass die Bestandsfunktion über den betrachteten Zeitraum zu integrieren ist, womit man die Fläche unter der Bestandsfunktion erhält. Geteilt durch die Länge des Zeitraums erhält man die Höhe eines Rechtecks, welches die gleiche Fläche einschließt - die durchschnittliche Höhe der Bestandsfunktion, den durchschnittlichen Lagerbestand:

$$b_d := \frac{\int_0^n b(t)\,dt}{n} = 2812.5$$

Damit kann die Kostenfunktion in Abhängigkeit von der Losgröße definiert werden. Es sei:

$k_0 := 100000$ Rüstkosten pro Los

$k_1 := 432$ Lagerkosten pro Stück und Jahr

Die jährlichen Rüstkosten K_R ergeben sich, indem die Anzahl der Auflagen pro Jahr mit k_0 multipliziert wird:

$K_R(x) := k_0 \cdot \frac{m}{x}$ Jährliche Rüstkosten

Die jährlichen Lagerkosten K_L ergeben sich, indem der durchschnittliche Lagerbestand mit k_1 multipliziert wird:

$K_L(x) := k_1 \cdot \left(1 - \frac{a}{z}\right) \cdot \frac{x}{2}$ Jährliche Lagerkosten

Beide Kostenarten zusammen bilden die jährlichen Gesamtkosten K:

$$K(x) := K_L(x) + K_R(x)$$

Die Kostenfunktion lautet also

$K(x) := k_0 \cdot \frac{m}{x} + k_1 \cdot \left(1 - \frac{a}{z}\right) \cdot \frac{x}{2}$ Jährliche Gesamtkosten

Optimale Losgröße

Diese Kosten sind zu minimieren. Dazu wird die erste Ableitung der Kostenfunktion gebildet, die erste Ableitung wird gleich null gesetzt und nach x aufgelöst:

$$\frac{d}{dx}K(x) = \frac{-k_0 \cdot m}{x^2} + \frac{k_1 \cdot \left(1 - \frac{a}{z}\right)}{2} = 0$$

$$\frac{k_0 \cdot m}{x^2} = \frac{k_1 \cdot \left(1 - \frac{a}{z}\right)}{2}$$

$$x^2 = \frac{2 \cdot k_0 \cdot m}{k_1 \cdot \left(1 - \frac{a}{z}\right)}$$

$$x_{opt} := \sqrt{\frac{2 \cdot k_0 \cdot m}{k_1 \cdot \left(1 - \frac{a}{z}\right)}} = 14907$$

Optimale Losgröße

$\text{Minimieren}(K, x) = 14907$

$x := 10000 \,..\, 20000$