Optimale Bestellmenge

Die Bestellmenge ist ein Problem, wenn ein bestimmter Bedarf an einem Gut regelmäßig anfällt, die Lieferungen aber nicht im gleichen Rhythmus erfolgen. Das Gut wird in einer bestimmten Menge bestellt, auf Lager gelegt und dann ab Lager verbraucht. Sobald der Lagerbestand auf null gesunken ist, erfolgt eine neue Lieferung, sodass der Verbrauch kontinuierlich fortgesetzt werden kann.

Ein kostenrechnerisches Problem ist die Bemessung der Bestellmenge dann, wenn die einzelne Bestellung Kosten verursacht, die nicht von der Anzahl der bestellten Einheiten abhängen, sondern nur von dem bloßen Akt der Bestellung. Diese Kosten seien als Bestellkosten bezeichnet, und es sei angenommen, dass die Bestellkosten bei jeder Bestellung in gleicher Höhe anfallen, unabhängig davon, wie viele Einheiten bestellt werden.

Wird der Bedarf einer Periode durch eine einzige Bestellung gedeckt, sind die Bestellkosten pro Periode so niedrig wie möglich. Die Bestellkosten pro Periode steigen mit der Anzahl der Bestellungen. Da die Bestellmenge umso kleiner wird, je mehr Bestellungen in einer Periode aufgegeben werden, um einen bestimmten Gesamtbedarf zu decken, kann man feststellen, dass die Bestellkosten pro Periode umso höher sind, je kleiner die Bestellmenge ist.

Es sei:

$m := 1200$ Gesamtbedarf der Periode

$x := 100$ Bestellmenge

$k_B := 10$ Bestellkosten pro Bestellung

Die Anzahl der Bestellungen pro Periode ergibt sich aus dem Gesamtbedarf, geteilt durch die Bestellmenge:

$\frac{m}{x} = 12$ Anzahl der Bestellungen pro Periode

Die Anzahl der Bestellungen pro Periode, multipliziert mit der Bestellmenge, muss wieder den Gesamtbedarf ergeben:

$$\frac{m}{x} \cdot x = 1200$$

Die Bestellkosten pro Bestellung, multipliziert mit der Häufigkeit der Bestellungen, ergibt die Bestellkosten pro Periode:

$K_B(x) := k_B \cdot \frac{m}{x}$ Bestellkosten pro Periode

Gäbe es nur die Bestellkosten, wäre es natürlich am günstigsten, möglichst viel auf einmal zu bestellen. Jedoch liegen die bestellten Güter auf Lager, bis sie gebraucht und dem Lager entnommen werden; und in dieser Zeit fallen auch Kosten für die Lagerung an. Die Lagerung jedes einzelnen Stücks kostet etwas, und je höher der Lagerbestand, desto höher sind die Lagerkosten insgesamt. Dieser Umstand allein würde für einen niedrigen Lagerbestand, also kleinere Bestellmengen sprechen. Eine kleinere Bestellmenge erhöht andererseits die Bestellkosten - ein typisches Optimierungsproblem. Die optimale Bestellmenge ist diejenige, bei der die Summe aus Bestellkosten und Lagerkosten pro Periode ein Minimum erreicht.

Voraussetzung für die Bestimmung der Lagerkosten ist die Kenntnis des durchschnittlichen Lagerbestandes, denn dieser ergibt, multipliziert mit den Lagerkosten pro Stück und Periode, die Lagerkosten der Periode.

Optimale Bestellmenge

Es sei nun angenommen, dass die Verminderung des Bestandes pro Zeiteinheit in der gesamten Periode konstant ist. Insgesamt vermindert sich der Lagerbestand um den Gesamtbedarf m. Sei a die Verminderung des Lagers pro Zeiteinheit und n die Länge der Periode in Zeiteinheiten, dann ist a der Gesamtbedarf m geteilt durch n. Hier sei eine Periode der Kostenrechnung von der Länge eines Jahres betrachtet. Die Zeiteinheit sei das Jahr und damit n = 1. Es ist also

$n := 1$ Länge der Periode

$a := \frac{m}{n} = 1200$ Verminderung des Bestandes pro Zeiteinheit

Da a als konstant angenommen wird, ist die Bestandsfunktion linear mit a als negativer Steigung. Es sei weiter angenommen, dass der Zugang zum Lager in Höhe der Bestellmenge in einem Zeitpunkt erfolgt. Mit t für die Zeit und f(t) als Bestand im Zeitpunkt t lautet dann die Bestandsfunktion für einen Zyklus

$f(t) := x - a \cdot t$ Bestandsfunktion für einen Zyklus

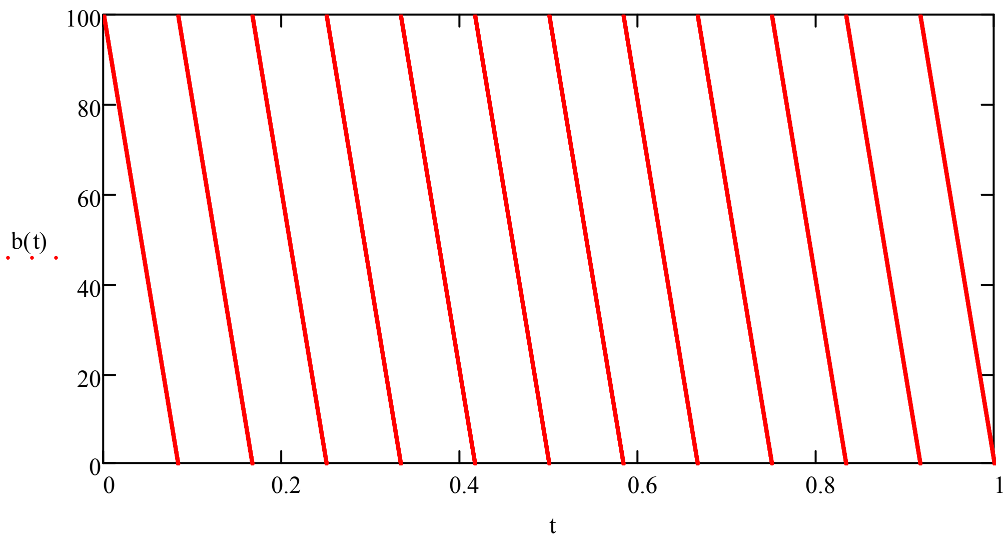
Der maximale Bestand ist jeweils die Bestellmenge. Der Bestand verringert sich mit der Geschwindigkeit a bis auf null. Die hierfür benötigte Zeit ergibt sich, wenn die Bestandsfunktion gleich null gesetzt und nach t aufgelöst wird:

$x - a \cdot t = 0 \;\left|\begin{array}{l}\text{explizit}\\ \text{auflösen}, t\end{array}\right. \rightarrow \frac{x}{a}$ Dauer eines Zyklus

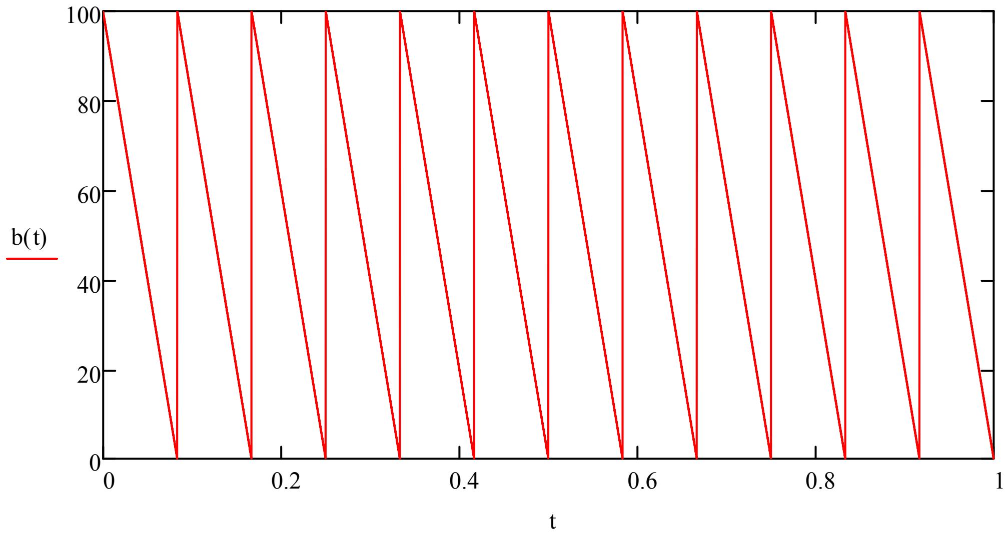
Da sich die Zyklen wiederholen, wird die Bestandsfunktion rekursiv formuliert; das heißt, die Funktion verweist auf sich selbst und wird in einer Schleife ausgeführt:

$$b(t) := \left|\begin{array}{l} f(t) \;\; \text{if } t \le \frac{x}{a} \\ b\left(t - \frac{x}{a}\right) \;\; \text{otherwise} \end{array}\right.$$ Bestandsfunktion für die Periode

$t := 0, 0.0001 .. n$



Diese Funktion ist unstetig in den Sprungstellen, in denen der Bestand 0 ist und sogleich wieder aufgefüllt wird. Um die Sprungstellen zu verdeutlichen, wird die Bestandsfunktion oft mit verbindenden senkrechten Linien gezeichnet ("Sägezahnkurve"):



Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass diese senkrechten Verbindungslinien *nicht* zur Funktion gehören.

Aus der Bestandsfunktion lässt sich als Grundlage für die Berechnung der Lagerkosten der durchschnittliche Lagerbestand ableiten. Für die hier vorliegende Bestandsfunktion, die zwischen den Werten x und 0 linear verläuft, ist der durchschnittliche Bestand einfach die Hälfte des maximalen Bestandes:

$b_d := \frac{x}{2} = 50$ Durchschnittlicher Lagerbestand

Allgemein gilt für die Ermittlung eines durchschnittlichen Bestandes, dass die Bestandsfunktion über den betrachteten Zeitraum zu integrieren ist, womit man die Fläche unter der Bestandsfunktion erhält. Geteilt durch die Länge des Zeitraums erhält man die Höhe eines Rechtecks, welches die gleiche Fläche einschließt - die durchschnittliche Höhe der Bestandsfunktion, den durchschnittlichen Lagerbestand:

$$b_d := \frac{\int_0^n b(t)\,dt}{n} = 50$$

Um aus dem durchschnittlichen Lagerbestand die Lagerkosten pro Periode berechnen zu können, muss man die Lagerkosten pro Stück und Periode kennen. Diese seien

$k_L := 2.4$ Lagerkosten pro Stück und Periode

Die Lagerkosten insgesamt ergeben sich durch Multiplikation mit dem durchschnittlichen Bestand:

$K_L(x) := k_L \cdot \frac{x}{2}$ Lagerkosten pro Periode

Optimale Bestellmenge

Die Summe aus Bestellkosten und Lagerkosten ergibt die für die optimale Bestellmenge relevanten Gesamtkosten der Periode:

$$K(x) := k_B \cdot \frac{m}{x} + k_L \cdot \frac{x}{2}$$ Gesamtkosten der Periode

Gesucht ist derjenige Wert von x, bei dem die Kostenfunktion ein Minimum aufweist. Dazu wird die erste Ableitung gebildet und gleich null gesetzt:

$$\frac{d}{dx}K(x) = \frac{-k_B \cdot m}{x^2} + \frac{k_L}{2} = 0$$

Die Auflösung nach x ergibt die optimale Bestellmenge x_{opt}:

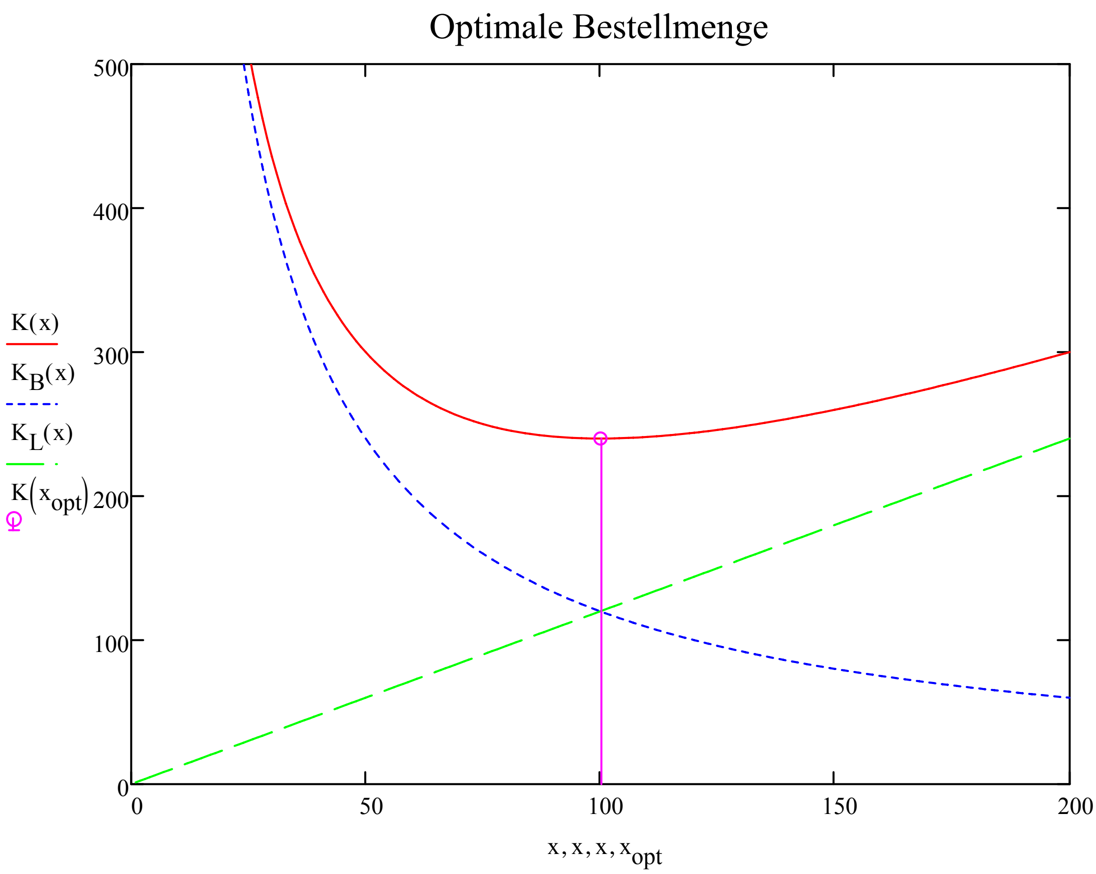
$$\frac{k_B \cdot m}{x^2} = \frac{k_L}{2}$$

$$x^2 = \frac{2 \cdot k_B \cdot m}{k_L}$$

$$x_{opt} := \sqrt{\frac{2 \cdot k_B \cdot m}{k_L}} = 100$$ Optimale Bestellmenge

$\mathrm{Minimieren}(K, x) = 100$

$x := 1 .. 200$



optlos02.xmcd