Herleitung und Umstellung der allgemeinen Zinseszinsformel

1. Herleitung der Zinseszinsformel

Gegeben sei ein Kapital von K_0, das zum Zinssatz i angelegt wird. Nach jeweils einem Jahr werden die Zinsen dem Kapital zugeschlagen. Wie hoch ist das Kapital nach t Jahren?

Jährliche Zinsen werden errechnet, indem man den Zinssatz mit dem Kapital zu Beginn des Jahres multipliziert. Für das Kapital K_0 betragen die Zinsen nach einem Jahr $K_0 \cdot i$. Wenn diese Zinsen dem Kapital zugeschlagen werden, beträgt das Kapital nach einem Jahr

(1) $$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0 \cdot (1+i)$$

Dieses Kapital ist zugleich das Anfangskapital des zweiten Jahres, und diesem Kapital werden am Ende des zweiten Jahres wieder die Zinsen zugeschlagen, sodass:

(2) $$K_2 = K_0 \cdot (1+i) + K_0 \cdot (1+i) \cdot i = K_0 \cdot (1+i) \cdot (1+i) = K_0 \cdot (1+i)^2$$

Für das Kapital am Ende des dritten Jahres, K_3, gilt entsprechend:

(3) $$K_3 = K_0 \cdot (1+i)^2 + K_0 \cdot (1+i)^2 \cdot i = K_0 \cdot (1+i)^2 \cdot (1+i) = K_0 \cdot (1+i)^3$$

Man sieht, dass das Kapital sich in jedem Jahr mit dem Faktor $1 + i$ vermehrt und die Anzahl der Faktoren genau der Anzahl der Jahre entspricht.

Sei n die Dauer der Kapitalanlage vom Beginn bis zur Rückzahlung, dann kann die Variable t alle ganzzahligen Werte von 1 bis n annehmen:

(4) $$t = 1 \ldots n \quad \{t \in \mathbb{N}\}$$

Setzt man $n = 3$, dann ist nach Gleichung (3) offensichtlich richtig:

(5) $$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$$

Nach Gleichung (1) und (2) ist Gleichung (5) auch für $n = 1$ und $n = 2$ bewiesen, aber nicht für $n > 3$.

Wenn nun die Laufzeit der Kapitalanlage von n auf $n + 1$ erhöht wird, ist K_n das Anfangskapital im Zeitpunkt n, und das Endkapital im Zeitpunkt $n + 1$ ergibt sich durch Addition der auf K_n berechneten Zinsen:

(6) $$K_{n+1} = K_n + K_n \cdot i = K_n \cdot (1+i)$$

Gleichung (5) in Gleichung (6) eingesetzt:

(7) $$K_{n+1} = K_0 \cdot (1+i)^n \cdot (1+i) = K_0 \cdot (1+i)^{n+1}$$

Die Erhöhung der Laufzeit von n auf $n + 1$ erhöht den Exponenten von $1 + i$ ebenfalls auf $n + 1$.

Der Zusammenhang zwischen Gleichung (6) und Gleichung (7) setzt keinen bestimmten Wert für n voraus, nur dass $n + 1$ genau um 1 größer ist als n. Das ist evident.

Damit kann n in Gleichung (5) jede beliebige natürliche Zahl sein. Gleichung (5) gilt somit für alle ganzzahligen Laufzeiten von Kapitalanlagen.

Nun ist es auch von Interesse, den Wert einer Kapitalanlage vor dem Ende ihrer Laufzeit n festzustellen. Für eine bestimmte Kapitalanlage ist n eine Konstante, sodass sich aus Gleichung (5) für K_n ein einziger Wert ergibt. Gleichung (5) gilt aber für jeden ganzzahligen Wert von n, und eben eine solche Reihe von Werten beschreibt t. Damit gilt Gleichung (5) für jeden der Werte von Gleichung (4). Das heißt, t kann als unabhängige Variable in Gleichung (5) eingesetzt werden. Die allgemeine Zinseszinsformel ist dann eine Funktion von t:

(8) $$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t$$

In dieser Funktion ist K_t, der Wert der Kapitalanlage einschließlich der Zinsen, die abhängige Variable und t, die seit dem Beginn der Kapitalanlage verstrichene Zeit, die unabhängige Variable.

Es stellt sich nun die Frage, ob die Zinseszinsformel auch definiert ist für nicht ganzzahlige Werte der unabhängigen Variablen. Wird zunächst der Fall $t = 0$ betrachtet, so ergibt Gleichung (8) hiermit

(9) $$K_0 = K_0 \cdot (1+i)^0 = K_0$$

Dies ist das erwartete Ergebnis: Wenn die Laufzeit einer Kapitalanlage gleich null ist, verändert sich ihr Wert nicht.

Gilt die Zinseszinsformel auch für Jahresbruchteile, also etwa für $t = 0{,}5$ oder für $t = 1{,}25$, gilt also die Formel für rationale Zahlen?

Tatsächlich ist die Funktion $(1 + i)^t$ eine Exponentialfunktion, die mit $1 + i > 0$ überall stetig ist. Das heißt, die Funktion ist für alle reellen Zahlen definiert. Man kann also auch folgende Werte einsetzen:

$$t = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{1}{4}, \quad t = \frac{1}{12}, \quad t = \frac{1}{365}, \quad t = \frac{1}{366}, \quad t = 16{,}\overline{6} \quad \text{usw.}$$

Dieser Umstand bereitet dem Ökonomen Probleme, insbesondere das Problem der unterjährigen Verzinsung, das Problem ungleich langer Monate, das Problem der Schaltjahre, aber nicht dem Mathematiker.

2. Umstellung der Zinseszinsformel nach dem Anfangskapital

Die Zinseszinsformel wurde aus der Fragestellung abgeleitet, wie sich ein gegebenes Anfangskapital vermehrt, wenn dem Kapital Zinsen zugeschlagen werden. Man sagt, das Kapital wird aufgezinst.

Betrachtet man dagegen das Endkapital als gegeben und stellt die Zinseszinsformel nach dem Anfangskapital um, spricht man vom Abzinsen oder Diskontieren. Um in Gleichung (8) das Anfangskapital K_0 zu isolieren, muss die Gleichung nur durch $(1 + i)^t$ geteilt werden:

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t \quad | : (1+i)^t$$

(10) $$K_0 = \frac{K_t}{(1+i)^t}$$

3. Umstellung der Zinseszinsformel nach dem Zinssatz

Wenn das Anfangskapital, die Laufzeit und das Endkapital gegeben sind, kann aus diesen Daten der Zinssatz errechnet werden. Um die Zinseszinsformel entsprechend umzustellen, wird Gleichung (8) zunächst durch K_0 geteilt:

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t \quad | : K_0$$

(11) $$(1+i)^t = \frac{K_t}{K_0}$$

Hieraus die t. Wurzel gezogen und nach i aufgelöst:

(12) $$i = \sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1$$

Beim Lösen dieser Gleichung mit konkreten Daten muss man bedenken, dass eine solche Gleichung t Lösungen hat, die zum Teil ökonomisch unsinnig sind und daher ausgeschlossen werden müssen. Als Beispiel hierfür sei folgender Fall betrachtet:

$$K_0 = 100$$
$$K_t = 400$$
$$t = 2$$

Die zu lösende Gleichung ist

$$i = \sqrt{\frac{400}{100}} - 1$$

Die Lösungen sind

$$i_1 = 1 = 100\,\%$$
$$i_2 = -3 = -300\,\%$$

Man erkennt auf den ersten Blick, dass bei einem Wachstum des Kapitals von 100 auf 400 in zwei Jahren nur der positive Zinssatz richtig sein kann, nicht der negative – davon abgesehen, dass Kapitalanlagen höchstens 100 % ihres Wertes verlieren können, wenn nicht gerade eine Nachschusspflicht besteht.

Wenn also $K_t > K_0$, dann muss der Zinssatz i, die Wachstumsrate des Kapitals, positiv sein, im umgekehrten Falle negativ.

4. Umstellung der Zinseszinsformel nach der Laufzeit

Die Auflösung der Zinseszinsformel nach der Laufzeit ist nicht trivial. Dem mathematisch Ungeübten sei empfohlen, sich vorher einige Regeln des Rechnens mit Potenzen zu vergegenwärtigen.

Zwei Potenzen mit gleicher Grundzahl werden miteinander multipliziert, indem die Exponenten addiert werden:

(13) $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Zwei Potenzen mit gleicher Grundzahl werden durcheinander dividiert, indem die Exponenten voneinander subtrahiert werden:

(14) $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Eine Potenz wird potenziert, indem die Exponenten miteinander multipliziert werden:

(15) $$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$$

Aus einer Potenz wird die n. Wurzel gezogen, indem der Exponent durch n geteilt wird:

(16) $$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Außerdem ist es nützlich, den Begriff des Logarithmus zu kennen. Der Logarithmus x einer Zahl a ist der Exponent, mit dem die Basis b des Logarithmus potenziert werden muss, um diese Zahl zu erhalten:

(17) $$b^x = a$$

(18) $$x = \text{Logarithmus von a zur Basis b}$$

Für die dekadischen Logarithmen zur Basis 10 schreibt man $x = \log a$. Dies in Gleichung (17) eingesetzt:

(19) $$10^{\log a} = a$$

Für die natürlichen Logarithmen zur Basis *e* (Eulersche Konstante) schreibt man $x = \ln a$, sodass

(20) $$e^{\ln a} = a$$

Mithilfe der Logarithmen kann man Funktionen des durch Gleichung (17) dargestellten Typs nach der unabhängigen Variablen auflösen. Die Ähnlichkeit der nach *x* aufzulösenden Gleichung (17) und der nach *t* aufzulösenden Gleichung (11) liegt auf der Hand. Beides sind Exponentialfunktionen, bei denen die unabhängige Variable den Exponenten darstellt.

Nach Gleichung (19) kann man nun schreiben:

(21) $$10^{\log(1+i)} = 1+i$$

(22) $$10^{\log K_t} = K_t$$

(23) $$10^{\log K_0} = K_0$$

Die Gleichungen (21), (22) und (23) in Gleichung (11) eingesetzt:

(24) $$\left[10^{\log(1+i)}\right]^t = \frac{10^{\log K_t}}{10^{\log K_0}}$$

Unter Verwendung der Rechenregeln (14) und (15) ergibt sich hieraus

(25) $$10^{t \cdot \log(1+i)} = 10^{\log K_t - \log K_0}$$

Damit stehen sich zwei Potenzen mit gleicher Grundzahl gegenüber, die einander gleich sind. Dann müssen auch die Exponenten einander gleich sein. Es gilt also

(26) $$t \cdot \log(1+i) = \log K_t - \log K_0$$

Hieraus folgt

(27) $$t = \frac{\log K_t - \log K_0}{\log(1+i)}$$

Die gleiche Ableitung kann auch mit den natürlichen Logarithmen durchgeführt werden. Aus Gleichung (20) folgt für die Elemente von Gleichung (11):

(28) $$e^{\ln(1+i)} = 1+i$$

(29) $$e^{\ln K_t} = K_t$$

(30) $$e^{\ln K_0} = K_0$$

Gleichungen (28), (29) und (30) in Gleichung (11) eingesetzt:

(31) $$\left[e^{\ln(1+i)}\right]^t = \frac{e^{\ln K_t}}{e^{\ln K_0}}$$

(32) $$e^{t \cdot \ln(1+i)} = e^{\ln K_t - \ln K_0}$$

(33) $$t \cdot \ln(1+i) = \ln K_t - \ln K_0$$

(34) $$t = \frac{\ln K_t - \ln K_0}{\ln(1+i)}$$

5. Das Problem nicht-ganzzahliger Laufzeiten mit jährlichen Zinseszinsen

Wenn auch die Zinseszinsfunktion $K_t = K_0 \cdot (1+i)^t$ als Exponentialfunktion überall stetig ist, so beruhte ihre Herleitung doch darauf, dass die Zinsen auf das Kapital inklusive der bisher aufgelaufenen Zinsen jeweils nach einem Jahr zugeschlagen werden. Zinsen tragen also genau nach einem Jahr wieder Zinsen. Wegen der Stetigkeit gilt diese Funktion aber auch im unterjährigen Bereich, und es stellt sich die Frage, wie die Prämisse der jährlichen Zinseszinsen dann zu interpretieren ist. Hierfür sei folgendes Beispiel betrachtet:

$K_0 = 100{,}00$
$i = 0{,}1$
$t = 0{,}5$

Welche Zinsen fallen an, wenn die Kapitalanlage nach einem halben Jahr beendet wird und dennoch durch die Verwendung der Zinseszinsfunktion $K_t = K_0 \cdot (1+i)^t$ jährliche Zinseszinsen unterstellt werden? Der Kapitalbetrag nach einem halben Jahr ist

$$K_{0,5} = 100 \cdot 1{,}1^{0,5} = 104{,}88$$

Die Zinsen sind

$$K_{0,5} - K_0 = 104{,}88 - 100{,}00 = 4{,}88$$

Dieser Betrag entspricht nicht den Erwartungen eines Kaufmanns. Für den Kaufmann ist klar, dass ein Jahreszinssatz von 10 % auf das halbe Jahr gerechnet einen Zinssatz von 10 % / 2 = 5 % bedeutet. Wächst ein Kapital in einem Jahr von 100 auf 110, so wächst es in einem halben Jahr gerade auf 105 – und nicht auf 104,88.

Der Unterschied liegt darin, ab wann Zinsen wieder Zinsen tragen, ab wann es Zinseszinsen gibt. Für die allgemeine Zinsformel $K_t = K_0 \cdot (1+i)^t$ gilt aufgrund ihrer Herleitung immer noch die Prämisse, dass Zinsen erst nach einem Jahr dem Kapital zugeschlagen werden und ab dann wieder Zinsen tragen, aber nicht vorher. Nach einem Jahr ist mit den Daten des Beispiels das Kapital genau um 10 % gestiegen, denn es gilt

$$K_1 = 100 \cdot 1{,}1^1 = 110$$

Wenn man die Zinseszinsfunktion $K_t = K_0 \cdot (1+i)^t$ verwendet, hat man damit unterstellt, dass Zinsen stets genau nach einem Jahr wieder Zinsen tragen. Die Zinsberechnung erfolgt einmal im Jahr nach Ablauf eines Jahres.

Das muss nun aber nicht so sein. Man kann die Zinsen auch nach einem halben Jahr, oder nach einem Vierteljahr, nach einem Monat oder welcher Zeitspanne auch immer berechnen. Man sieht aber schon an dem behandelten Beispiel, dass die Entwicklung des Kapitals eine andere ist, wenn die Zinsen in einem anderen Rhythmus als einmal pro Jahr dem Kapital zugeschlagen werden. Wenn im Beispiel die Zinsen nach jeweils einem halben Jahr berechnet werden, beträgt des Kapital nach dem ersten halben Jahr 105, und die Zinsen hierauf für das zweite halbe Jahr sind wiederum der halbe Jahreszinssatz, multipliziert mit eben diesem Kapital, also

$$105 \cdot \frac{10\ \%}{2} = 5{,}25$$

Das Kapital nach einem Jahr beträgt bei halbjährlicher Zinsberechnung 105 + 5,25 = 110,25. Gegenüber dem Anfangskapital von 100 ist das Kapital um 10,25 % gestiegen, obwohl der Jahreszinssatz nur 10 % beträgt. Die Anzahl der Zinsberechnungen pro Jahr, die hier 2 beträgt, hat Einfluss auf die Entwicklung des Kapitals. Das bedeutet, dass die allgemeine Zinseszinsformel um einen Parameter erweitert werden muss, der die Anzahl der Zinsberechnungen pro Jahr angibt.

6. Erweiterung der Zinseszinsformel

Sei *m* die Anzahl der Zinsberechnungen pro Jahr. Wenn die Zinsberechnungen – was vorausgesetzt wird – in regelmäßigen Zeitabständen erfolgen, beträgt die Zeitspanne von einer Zinsberechnung zur nächsten 1 / m Jahre. Die Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zinsberechnungen sei als Zinsperiode oder auch Zinseszinsperiode bezeichnet.

Ziel ist es, die Zinseszinsformel um den Parameter *m* zu erweitern. Dabei wird weiterhin von Zinssätzen ausgegangen, die sich auf das Jahr beziehen. Das heißt, irgendein Jahreszinssatz, multipliziert mit *einem* Kapitalbetrag, gibt stets die jährliche Veränderung des Kapitals an.

Wenn die Zinsperiode kürzer (oder auch länger) als ein Jahr ist, wird der Zinssatz entsprechend der Periode umgerechnet. Man kann diesen auf die Zinsperiode umgerechneten Zinssatz dann einen „periodenkonformen" Zinssatz nennen. Beträgt die Zinsperiode ein halbes Jahr, wird der halbe Jahreszinssatz verwendet, bei einer Periode von einem Vierteljahr ein Viertel des Jahreszinssatzes, bei einer Periode von einem Monat ein Zwölftel, und bei einer Periode von 1 / m Jahren und einem Jahreszinssatz von *i* ist der periodenkonforme Zinssatz $\frac{i}{m}$.

Am Ende einer jeden Zinsperiode werden wie immer die Zinsen für diese Periode dem Kapital zugeschlagen. Für das Kapital nach $\frac{1}{m}$ Jahren gilt also

(35) $$K_{\frac{1}{m}} = K_0 + K_0 \cdot \frac{i}{m} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)$$

Das Endkapital nach $\frac{1}{m}$ Jahren ist zugleich das Anfangskapital der zweiten Zinsperiode, sodass

(36) $$K_{\frac{2}{m}} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right) + K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right) \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^2$$

Nach drei Zinsperioden ist das Kapital

(37) $$K_{\frac{3}{m}} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^2 + K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^2 \cdot \frac{i}{m} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^3$$

Am Ende jeder Zinsperiode wird das Anfangskapital der jeweiligen Periode mit dem Zinssatz $\frac{i}{m}$ multipliziert und zum Endkapital der Periode addiert:

$$\text{Anfangskapital der Periode} + \text{Anfangskapital der Periode} \cdot \text{periodenkonformer Zinssatz}$$

Aus dieser Summe lässt sich stets das Anfangskapital ausklammern:

$$\text{Anfangskapital der Periode} \cdot (1 + \text{periodenkonformer Zinssatz})$$

Das Anfangskapital wächst also in jeder Zinsperiode mit dem Faktor 1 + periodenkonformer Zinssatz, hier $1 + \frac{i}{m}$. Dieser Faktor wird auf das ursprüngliche Anfangskapital so oft angewendet, wie Zinsperioden verstrichen sind. Das Kapital nach einer bestimmten Anzahl von Zinsperioden ist also

(38) $$K_{\text{nach einer bestimmten Anzahl von Zinsperioden}} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\text{Anzahl der Zinsperioden}}$$

Zwischen der Anzahl der verstrichenen Zinsperioden und der Laufzeit besteht nun der einfache Zusammenhang, dass die Anzahl der Zinsperioden, multipliziert mit ihrer Länge, die Laufzeit ergibt:

Herleitung und Umstellung der allgemeinen Zinseszinsformel

(39) $$\text{Anzahl der Zinsperioden} \cdot \text{Länge einer Zinsperiode} = \text{Laufzeit}$$

Wird die Zeit *t* weiterhin in Jahren gemessen und finden pro Jahr in gleichbleibenden Zeitabständen *m* Zinsberechnungen statt, dann fallen in einem Zeitraum von *t* Jahren $m \cdot t$ Zinsberechnungen an; das heißt, die Anzahl der Zinsperioden ist $m \cdot t$. Dies kann ohne Weiteres in Gleichung (38) eingesetzt werden. Multipliziert mit der Länge einer Zinsperiode von $\frac{1}{m}$ ergibt sich für die Laufzeit nach $m \cdot t$ Zinsperioden entsprechend Gleichung (39) $m \cdot t \cdot \frac{1}{m} = t$, wie dies zu erwarten war. Das Kapital nach $m \cdot t$ Zinsperioden ist also einfach K_t.

Damit lautet die um die Anzahl der Zinsberechnungen pro Jahr erweiterte Zinseszinsformel

(40) $$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}$$

Für $m = 1$ geht diese Formel in die unter der Voraussetzung jährlicher Zinseszinsen abgeleitete Zinseszinsformel [Gleichung (8)] über.

Mithilfe des Parameters *m* können aus der erweiterten Zinseszinsformel alle möglichen Verzinsungsformen abgeleitet werden, wie im Folgenden gezeigt wird. Es sei zunächst der Fall betrachtet, dass während der gesamten Laufzeit einer Kapitalanlage überhaupt keine Zinseszinsen berechnet werden. In diesem Fall findet während der ganzen Laufzeit nur eine einzige Zinsberechnung statt – sonst würden Zinsen wieder Zinsen tragen. Für die Anzahl der Zinsberechnungen $m \cdot t$ gilt dann, dass diese gleich 1 sein muss:

$$m \cdot t = 1$$

Hieraus folgt für diesen Fall

(41) $$m = \frac{1}{t}$$

Dies in die Zinseszinsformel nach Gleichung (40) eingesetzt:

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{t} \cdot t} = K_0 \cdot (1 + i \cdot t)^1$$

(42) $$K_t = K_0 + K_0 \cdot i \cdot t$$

Dies ist die Formel für die Aufzinsung eines Kapitals mit einfacher Verzinsung. „Einfache“ Verzinsung heißt, dass Zinsen keine Zinsen tragen. Die Zinsen werden für die gesamte Laufzeit nur auf das Anfangskapital gerechnet und niemals auf ein um irgendwelche Zinsen erhöhtes Anfangskapital.

Die einfache Verzinsung lässt sich also als Grenzfall der Zinseszinsrechnung betrachten, indem für irgendeine Laufzeit nur einmal Zinsen berechnet werden. Die Grenze zur anderen Seite erreicht man, wenn die Anzahl der Zinsberechnungen pro Jahr erhöht wird. Man kann die Zinsen monatlich, täglich, stündlich, jede Minute, jede Sekunde berechnen – eine Obergrenze für *m* gibt es nicht. Der Fall $m \to \infty$ ist denkbar, und man muss sich fragen, wie hoch das Kapital nach *t* Jahren dann ist. Hierfür wird definiert

(43) $$\frac{i}{m} = \frac{1}{x}$$

Dies in Gleichung (40) eingesetzt:

(44) $$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{m \cdot t}$$

Aus (43) folgt

(45) $$m = i \cdot x$$

Gleichung (45) in (44) eingesetzt:

(46) $$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{i \cdot t \cdot x} = K_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{i \cdot t}$$

Der in Gleichung (46) enthaltene Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$ wird gesondert betrachtet. Wenn *m* gegen unendlich geht, dann geht nach Gleichung (45) auch *x* gegen unendlich, sofern i > 0, was vorausgesetzt wird. Der Grenzwert von $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$ für $x \to \infty$ ist die Eulersche Konstante *e*:

(47) $$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Wird in Gleichung (46) der Grenzübergang $x \to \infty$ durchgeführt, gilt also

$$K_t = \lim_{x \to \infty} K_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]^{i \cdot t}$$

(48) $$K_t = K_0 \cdot e^{i \cdot t}$$

Dies ist die Formel für die stetige Verzinsung. Das Anfangs- und das Endkapital können auch nichtmonetäre Größen sein; in diesem Fall nennt man Gleichung (48) die Formel des stetigen Wachstums, mit i > 0 als Wachstumsrate.

7. Umstellung der erweiterten Zinseszinsformel nach dem Anfangskapital

Um die erweiterte Zinseszinsformel gemäß Gleichung (40) nach dem Anfangskapital K_0 umzustellen, muss nur durch $\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}$ geteilt werden. Es ergibt sich

(49) $$K_0 = \frac{K_t}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}}$$

Für die stetige Zinseszinsformel folgt aus (48):

(50) $$K_0 = \frac{K_t}{e^{i \cdot t}}$$

8. Umstellung der erweiterten Zinseszinsformel nach dem Zinssatz

Aus Gleichung (40) folgt

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}$$

$$\frac{K_t}{K_0} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}$$

$$\sqrt[m \cdot t]{\frac{K_t}{K_0}} = 1 + \frac{i}{m}$$

$$\frac{i}{m} = \sqrt[m \cdot t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1$$

(51) $$i = m \cdot \left(\sqrt[m \cdot t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1\right)$$

Für die stetige Verzinsung folgt aus (48) zunächst

(52) $$e^{i \cdot t} = \frac{K_t}{K_0}$$

Um diese Gleichung nach dem Zinssatz *i* aufzulösen, muss man nur die Definition eines Logarithmus ernst nehmen: „Der Logarithmus einer Zahl ist der Exponent, mit dem die Basis des Logarithmus potenziert werden muss, um diese Zahl zu erhalten." Die Basis des natürlichen Logarithmus ist *e*. Nach Gleichung (52) ergibt *e*, potenziert mit $i \cdot t$, den Ausdruck $\frac{K_t}{K_0}$. Also ist $i \cdot t$ der natürliche Logarithmus, mit dem man $\frac{K_t}{K_0}$ erhält, und man kann ohne Weiteres schreiben

(53) $$i \cdot t = \ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right)$$

Diese Gleichung nach *i* aufgelöst:

(54) $$i = \frac{\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right)}{t}$$

9. Umstellung der erweiterten Zinseszinsformel nach der Laufzeit

Die erweiterte Aufzinsungsformel (40) wird zunächst in folgende Form gebracht:

(55) $$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t} = \frac{K_t}{K_0}$$

Die Bestandteile $\left(1 + \frac{i}{m}\right)$ und $\frac{K_t}{K_0}$ werden als Ergebnis des natürlichen Logarithmus ausgedrückt, indem die Definition des Logarithmus angewendet wird:

(56) $$e^{\ln\left(1 + \frac{i}{m}\right)} = 1 + \frac{i}{m}$$

(57) $$e^{\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right)} = \frac{K_t}{K_0}$$

Gleichungen (56) und (57) in (55) eingesetzt:

$$\left[e^{\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)}\right]^{m\cdot t} = e^{\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right)}$$

$$e^{m\cdot t\cdot\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)} = e^{\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right)}$$

$$m\cdot t\cdot\ln\left(1+\frac{i}{m}\right) = \ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right)$$

(58)
$$t = \frac{\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right)}{m\cdot\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)}$$

Es gilt nun auch

(59)
$$e^{\ln K_t} = K_t$$

(60)
$$e^{\ln K_0} = K_0$$

Der Quotient der Gleichungen (59) und (60) ist

$$\frac{e^{\ln K_t}}{e^{\ln K_0}} = \frac{K_t}{K_0}$$

Hieraus folgt

$$e^{\ln K_t - \ln K_0} = \frac{K_t}{K_0}$$

(61)
$$\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right) = \ln K_t - \ln K_0$$

Gleichung (61) in (58) eingesetzt ergibt eine alternative Formulierung für die Laufzeit:

(62)
$$t = \frac{\ln K_t - \ln K_0}{m\cdot\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)}$$

Für die stetige Verzinsung folgt aus (53) unmittelbar

(63)
$$t = \frac{\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right)}{i}$$

oder

(64)
$$t = \frac{\ln K_t - \ln K_0}{i}$$

10. Äquivalente Zinssätze

Es ist nun von Interesse, die verschiedenen Formen der Verzinsung miteinander zu vergleichen. Dazu wird jeweils eine bestimmte Verzinsungsform als Ausgangspunkt gewählt und dazu derjenige Zinssatz der übrigen Verzinsungsformen bestimmt, der von einem gegebenen Anfangskapital bei gleicher Laufzeit zum selben Endkapital führt.

Herleitung und Umstellung der allgemeinen Zinseszinsformel

Zur Unterscheidung der Zinssätze werden diese nach der Verzinsungsform benannt, auf die sie angewandt werden. Es sei

i_e = Zinssatz bei einfacher Verzinsung
i_j = Zinssatz bei jährlicher Verzinsung
i_m = Zinssatz bei *m*-maliger Verzinsung pro Jahr
i_s = Zinssatz bei stetiger Verzinsung

Als Erstes sei der Grenzfall der Zinseszinsrechnung, die einfache Verzinsung, zum Ausgangspunkt gewählt. Mit i_e für den Zinssatz lautet die Formel der einfachen Verzinsung gemäß Gleichung (42):

(65) $$K_t = K_0 \cdot (1 + i_e \cdot t)$$

Die übrigen Verzinsungsformen sind nach (8), (40) und (48) mit den entsprechenden Zinssätzen

(66) $$K_t = K_0 \cdot (1 + i_j)^t$$

(67) $$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i_m}{m}\right)^{m \cdot t}$$

(68) $$K_t = K_0 \cdot e^{i_s \cdot t}$$

Die Zinssätze sind äquivalent, wenn sie zum gleichen Ergebnis führen, das heißt wenn (65) = (66) = (67) = (68). Hiervon wird zunächst der Fall (65) = (66) betrachtet.

$$K_0 \cdot (1 + i_e \cdot t) = K_0 \cdot (1 + i_j)^t$$

$$(1 + i_j)^t = 1 + i_e \cdot t$$

$$1 + i_j = \sqrt[t]{1 + i_e \cdot t}$$

(69) $$i_j = \sqrt[t]{1 + i_e \cdot t} - 1$$

Das heißt: Wenn ein Kapital bei einfacher Verzinsung mit dem Zinssatz i_e verzinst wird, müsste der Zinssatz bei jährlicher Verzinsung $i_j = \sqrt[t]{1 + i_e \cdot t} - 1$ betragen, um dasselbe Endkapital zu erreichen. Der Zinssatz bei jährlicher Verzinsung $i_j = \sqrt[t]{1 + i_e \cdot t} - 1$ ist dem Zinssatz i_e bei einfacher Verzinsung äquivalent.

Der Zinssatz bei *m*-maliger Verzinsung pro Jahr, der einem gegebenen Zinssatz bei einfacher Verzinsung äquivalent ist, ergibt sich aus der Gleichsetzung von (65) und (67):

$$K_0 \cdot (1 + i_e \cdot t) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i_m}{m}\right)^{m \cdot t}$$

$$\left(1 + \frac{i_m}{m}\right)^{m \cdot t} = 1 + i_e \cdot t$$

$$1 + \frac{i_m}{m} = \sqrt[m \cdot t]{1 + i_e \cdot t}$$

$$\frac{i_m}{m} = \sqrt[m \cdot t]{1 + i_e \cdot t} - 1$$

(70) $$i_m = m \cdot \left(\sqrt[m \cdot t]{1 + i_e \cdot t} - 1\right)$$

Der Zinssatz bei stetiger Verzinsung, der einem gegebenen Zinssatz bei einfacher Verzinsung äquivalent ist, ergibt sich aus der Gleichsetzung von (65) und (68):

Herleitung und Umstellung der allgemeinen Zinseszinsformel

$$K_0 \cdot (1+i_e \cdot t) = K_0 \cdot e^{i_s \cdot t}$$
$$e^{i_s \cdot t} = 1+i_e \cdot t$$
$$\ln(1+i_e \cdot t) = i_s \cdot t$$

(71) $$i_s = \frac{\ln(1+i_e \cdot t)}{t}$$

Der Zinssatz bei einfacher Verzinsung, der einem gegebenen Zinssatz bei jährlicher Verzinsung äquivalent ist, ergibt sich aus der Gleichsetzung von (66) und (65):

$$K_0 \cdot (1+i_j)^t = K_0 \cdot (1+i_e \cdot t)$$
$$1+i_e \cdot t = (1+i_j)^t$$
$$i_e \cdot t = (1+i_j)^t - 1$$

(72) $$i_e = \frac{(1+i_j)^t - 1}{t}$$

Der Zinssatz bei *m*-maliger Verzinsung pro Jahr, der einem gegebenen Zinssatz bei jährlicher Verzinsung äquivalent ist, ergibt sich aus der Gleichsetzung von (66) und (67):

$$K_0 \cdot (1+i_j)^t = K_0 \cdot \left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{m \cdot t}$$
$$\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{m \cdot t} = (1+i_j)^t$$
$$1+\frac{i_m}{m} = \sqrt[m]{1+i_j}$$
$$\frac{i_m}{m} = \sqrt[m]{1+i_j} - 1$$

(73) $$i_m = m \cdot \left(\sqrt[m]{1+i_j} - 1\right)$$

Der Zinssatz, der bei stetiger Verzinsung einem gegebenen Zinssatz bei jährlicher Verzinsung äquivalent ist, ergibt sich aus der Gleichsetzung von (66) und (68):

$$K_0 \cdot (1+i_j)^t = K_0 \cdot e^{i_s \cdot t}$$
$$e^{i_s \cdot t} = (1+i_j)^t$$
$$e^{i_s} = 1+i_j$$

(74) $$i_s = \ln(1+i_j)$$

Der Zinssatz, der bei einfacher Verzinsung einem gegebenen Zinssatz bei *m*-maliger Verzinsung pro Jahr äquivalent ist, ergibt sich aus der Gleichsetzung von (67) und (65):

$$K_0 \cdot \left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{m \cdot t} = K_0 \cdot (1+i_e \cdot t)$$
$$1+i_e \cdot t = \left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{m \cdot t}$$
$$i_e \cdot t = \left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{m \cdot t} - 1$$

(75) $$i_e = \frac{\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{m\cdot t} - 1}{t}$$

Der Zinssatz, der bei jährlicher Verzinsung einem gegebenen Zinssatz bei *m*-maliger Verzinsung pro Jahr äquivalent ist, ergibt sich aus der Gleichsetzung von (67) und (66):

$$K_0 \cdot \left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{m\cdot t} = K_0 \cdot \left(1+i_j\right)^t$$

$$\left(1+i_j\right)^t = \left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{m\cdot t}$$

$$1+i_j = \left(1+\frac{i_m}{m}\right)^m$$

(76) $$i_j = \left(1+\frac{i_m}{m}\right)^m - 1$$

Der Zinssatz, der bei stetiger Verzinsung einem gegebenen Zinssatz bei *m*-maliger Verzinsung pro Jahr äquivalent ist, ergibt sich aus der Gleichsetzung von (67) und (68):

$$K_0 \cdot \left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{m\cdot t} = K_0 \cdot e^{i_s\cdot t}$$

$$e^{i_s\cdot t} = \left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{m\cdot t}$$

$$e^{i_s} = \left(1+\frac{i_m}{m}\right)^m$$

(77) $$i_s = \ln\left[\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^m\right]$$

Der Zinssatz, der bei einfacher Verzinsung einem gegebenen Zinssatz bei stetiger Verzinsung äquivalent ist, ergibt sich aus der Gleichsetzung von (68) und (65):

$$K_0 \cdot e^{i_s\cdot t} = K_0 \cdot \left(1+i_e \cdot t\right)$$

$$1+i_e \cdot t = e^{i_s\cdot t}$$

$$i_e \cdot t = e^{i_s\cdot t} - 1$$

(78) $$i_e = \frac{e^{i_s\cdot t} - 1}{t}$$

Der Zinssatz, der bei jährlicher Verzinsung einem gegebenen Zinssatz bei stetiger Verzinsung äquivalent ist, ergibt sich aus der Gleichsetzung von (68) und (66):

$$K_0 \cdot e^{i_s\cdot t} = K_0 \cdot \left(1+i_j\right)^t$$

$$\left(1+i_j\right)^t = e^{i_s\cdot t}$$

$$1+i_j = e^{i_s}$$

(79) $$i_j = e^{i_s} - 1$$

Der Zinssatz, der bei *m*-maliger Verzinsung pro Jahr einem gegebenen Zinssatz bei stetiger Verzinsung äquivalent ist, ergibt sich aus der Gleichsetzung von (68) und (67):

Herleitung und Umstellung der allgemeinen Zinseszinsformel

$$K_0 \cdot e^{i_s \cdot t} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i_m}{m}\right)^{m \cdot t}$$

$$\left(1 + \frac{i_m}{m}\right)^{m \cdot t} = e^{i_s \cdot t}$$

$$\left(1 + \frac{i_m}{m}\right)^{m} = e^{i_s}$$

$$1 + \frac{i_m}{m} = \sqrt[m]{e^{i_s}}$$

$$\frac{i_m}{m} = \sqrt[m]{e^{i_s}} - 1$$

(80) $$i_m = m \cdot \left(\sqrt[m]{e^{i_s}} - 1\right)$$