Zum Wachstum von Seerosen

Auf einem Teich blüht eine Seerose. Sie hat die wundersame Eigenschaft, über Nacht einen Nachkommen zu zeugen, ohne selbst zu verblühen. Einen Tag nach ihrer Entdeckung blühen also zwei Seerosen. Beide verdoppeln sich wieder über Nacht. Also gibt es am zweiten Tag nach der Entdeckung $2 \cdot 2 = 4$ Seerosen. Die 4 Seerosen verdoppeln sich wieder über Nacht, sodass am dritten Tag $4 \cdot 2 = 8$ Seerosen blühen.

Wie lautet die Wachstumsfunktion?

Sei *t* die Anzahl der Wachstumsperioden, hier also die Anzahl der Tage nach der Entdeckung der einen Seerose zu Beginn. Im Beginn ist $t = 0$, das Ende des ersten Tages nach der Entdeckung ist der Zeitpunkt $t = 1$, das Ende des zweiten Tages ist der Zeitpunkt $t = 2$, usw.

Der Bestand an Seerosen am Ende der jeweiligen Wachstumsperiode sei mit K_t bezeichnet. Der Anfangsbestand ist $K_0 = 1$, der Bestand am Ende des ersten Tages nach der Entdeckung ist $K_1 = 1 \cdot 2$, am zweiten Tag verdoppelt sich dieser Bestand auf $K_2 = 1 \cdot 2 \cdot 2$, am dritten Tag sind es $K_3 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, usw.

Die Anzahl der Verdoppelungen ist gleich der Anzahl der Tage, der Wachstumsperioden. Sei *n* eine beliebige Anzahl von Tagen, über die sich der Wachstumsprozess hinzieht, dann haben nach *n* Tagen *n* Verdoppelungen stattgefunden; es gilt also

$$K_n = 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots \cdot 2}_{\text{n Mal}}$$

Dabei ist 1 der vorausgesetzte Wert von 1 für den Anfangsbestand K_0. Für einen beliebigen Anfangsbestand gilt also

$$K_n = K_0 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots \cdot 2}_{\text{n Mal}}$$

Für das n-malige Produkt der Zahl 2 mit sich selbst schreibt man 2^n, sodass

(1) $$K_n = K_0 \cdot 2^n$$

Mit dieser Gleichung kann die Frage beantwortet werden, wie hoch der Seerosenbestand nach *n* Tagen ist. Um die Entwicklung des Bestandes vom Beginn bis zum Ende des Wachstumsprozesses darzustellen, wird die Gleichung als Funktion betrachtet mit $t = 0 \ldots n$ als Variable:

(2) $$K_n = K_0 \cdot 2^t$$

Damit lässt sich eine häufig gestellte Frage beantworten:

In einem Teich wächst eine Seerose. Am nächsten Tag sind es zwei, am übernächsten vier, und so geht es weiter. Der Bestand verdoppelt sich jeden Tag. Nach 48 Tagen ist der Teich vollständig mit Seerosen bedeckt. Wie viel Tage hat es gedauert, bis der Teich nur zur Hälfte bedeckt war?

Die Antwort: "Die Seerosen brauchen 48 Tage, um den Teich vollständig zu bedecken, also brauchen sie für die Hälfte auch nur die Hälfte der Zeit, das sind 24 Tage." ist falsch.

Die richtige Antwort lässt sich der nachfolgenden Tabelle entnehmen.

Zum Wachstum von Seerosen

Zeitpunkt	Bestand an Seerosen	Wachstumsrate
0	1	1
1	2	
2	4	
3	8	
4	16	
5	32	
6	64	
7	128	
8	256	
9	512	
10	1.024	
11	2.048	
12	4.096	
13	8.192	
14	16.384	
15	32.768	
16	65.536	
17	131.072	
18	262.144	
19	524.288	
20	1.048.576	
21	2.097.152	
22	4.194.304	
23	8.388.608	
24	16.777.216	
25	33.554.432	
26	67.108.864	
27	134.217.728	
28	268.435.456	
29	536.870.912	
30	1.073.741.824	
31	2.147.483.648	
32	4.294.967.296	
33	8.589.934.592	
34	17.179.869.184	
35	34.359.738.368	
36	68.719.476.736	
37	137.438.953.472	
38	274.877.906.944	
39	549.755.813.888	
40	1.099.511.627.776	
41	2.199.023.255.552	
42	4.398.046.511.104	
43	8.796.093.022.208	
44	17.592.186.044.416	
45	35.184.372.088.832	
46	70.368.744.177.664	
47	140.737.488.355.328	
48	281.474.976.710.656	

Zum Wachstum von Seerosen

Nach 48 Tagen ist der Bestand an Seerosen 281.474.976.710.656. Das muss schon ein ziemlich großer Teich sein.

Am Tag zuvor blühen 140.737.488.355.328 Seerosen. Das sind auch schon ziemlich viele, aber genau die Hälfte von 281.474.976.710.656. Nach dem Wachstumsgesetz der Seerosen verdoppelt sich ihre Zahl ja jeden Tag, also ist der Bestand des Vortages immer genau die Hälfte des folgenden Tages, sonst führt die Verdoppelung nicht zum richtigen Ergebnis. Zwei Hälften ergeben ein Ganzes.

Die richtige Antwort ist also: Nach 47 Tagen ist der Teich nur halbvoll. Es ist also noch genügend Platz da, aber einen Tag später nicht mehr.

Wer's nicht glaubt, teile in der Tabelle irgendeinen Bestand durch den Bestand des folgenden Tages; es wird immer die Hälfte sein.

Beweis:

$$\frac{K_{n-1}}{K_n} = \frac{K_0 \cdot 2^{n-1}}{K_0 \cdot 2^n} = 2^{n-1-n} = 2^{-1} = 2^{-1} \cdot \frac{2^1}{2^1} = \frac{2^0}{2^1} = \frac{1}{2}$$

Eine Funktion wie $K_t = K_0 \cdot 2^t$ nennt man eine Exponentialfunktion, weil die unabhängige Variable im Exponenten steht. Das damit beschriebene Wachstum heißt deswegen exponentielles Wachstum, und das ist sein Fluch: Die Zuwächse tragen selbst zum Wachstum bei, und das immer wieder. Das Wachstum wird immer stärker, bis kein Teich der Welt die Unmenge an Seerosen mehr fassen kann. Seerosen sind insofern kein gutes Beispiel für das exponentielle Wachstum. Viren passen da schon eher.

Beim linearen Wachstum, welches dem menschlichen Vorstellungsvermögen geläufiger ist, geht es gemütlicher zu. Hier tragen die Zuwächse nicht zum weiteren Wachstum bei. Für eine Pandemie würde das bedeuten, dass man sich nur am Patienten 0 anstecken kann. Das stimmt nun leider nicht, wie wir alle wissen. Jeder kann jeden anstecken, und insofern ist das Infektionsgeschehen von der Natur der Sache immer durch ein exponentielles Wachstum gekennzeichnet.

Ängstlichen Gemütern sei gesagt, dass es für die Gefährlichkeit des exponentiellen Wachstums auf die Wachstumsrate ankommt, die im Seerosen-Beispiel dezent verschwiegen wird. Die Wachstumsrate ist die relative Veränderung des Bestandes pro Wachstumsperiode. Tatsächlich lautet die allgemeine exponentielle Wachstumsformel

(3) $$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t$$

Hierbei ist *i* die Wachstumsrate. Eine Verdoppelung des Bestandes in einer Wachstumsperiode (hier der Tag) bedeutet $i = 100\% = 1$, sodass sich mit diesem Wert und $K_0 = 1$ für das Seerosenwachstum ergibt

$$K_t = 1 \cdot (1+1)^t$$
$$K_t = 2^t$$

Um es kurz zu machen: Für positive Werte von *i* (vom Englischen *interest* = Zins) hat die Wachstumsfunktion eine zunehmende Steigung, das Wachstum beschleunigt sich also, jedoch umso weniger, je kleiner *i* ist:

Zum Wachstum von Seerosen

$n := 14$ Anzahl der Wachstumsperioden, z.B. Tage, Wochen, Monate, Jahre

$t := 0..n$ Betrachteter Zeitraum

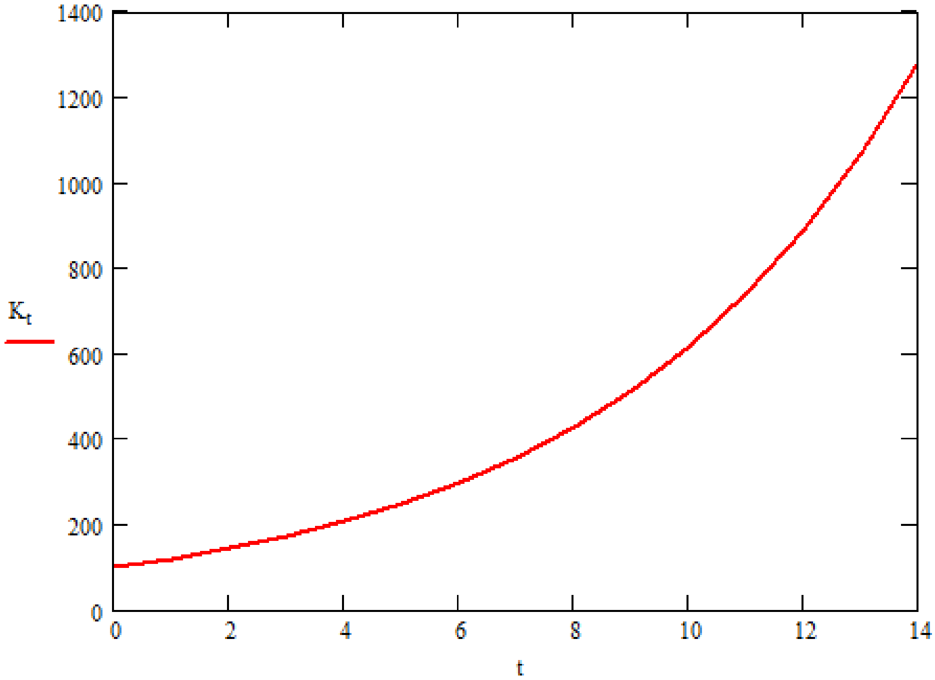
$i := 0.2$ Wachstumsrate pro Periode

$K_0 := 100$ Anfangsbestand

$K_t := K_0 \cdot (1 + i)^t$ Bestand nach t Perioden

$K_t =$

100.00
120.00
144.00
172.80
207.36
248.83
298.60
358.32
429.98
515.98
619.17
743.01
891.61
1069.93
1283.92



Zum Wachstum von Seerosen

$n := 14$ Anzahl der Wachstumsperioden, z.B. Tage, Wochen, Monate, Jahre

$t := 0..n$ Betrachteter Zeitraum

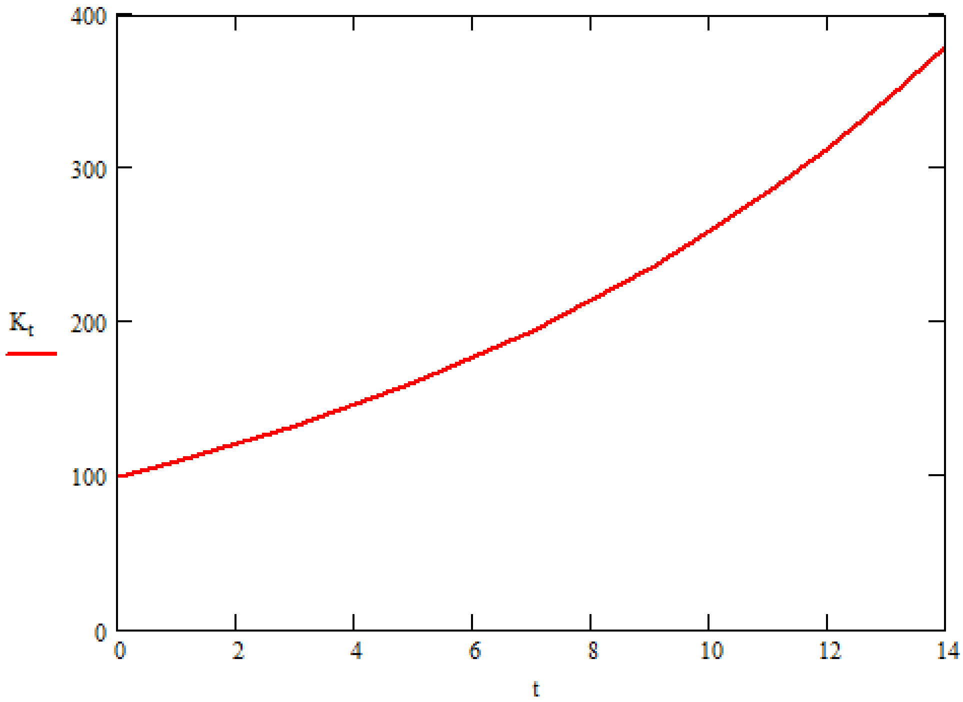
$i := 0.1$ Wachstumsrate pro Periode

$K_0 := 100$ Anfangsbestand

$K_t := K_0 \cdot (1+i)^t$ Bestand nach t Perioden

$K_t =$

100.00
110.00
121.00
133.10
146.41
161.05
177.16
194.87
214.36
235.79
259.37
285.31
313.84
345.23
379.75



Für $i = 0$ gibt es kein Wachstum:

Zum Wachstum von Seerosen

$n := 14$ Anzahl der Wachstumsperioden, z.B. Tage, Wochen, Monate, Jahre

$t := 0..n$ Betrachteter Zeitraum

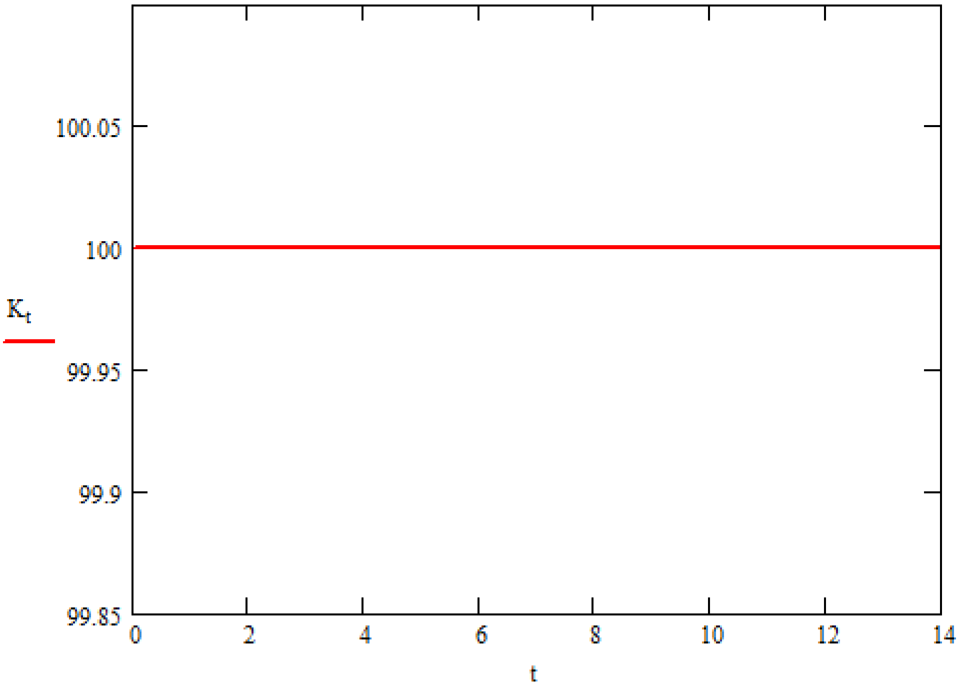
$i := 0$ Wachstumsrate pro Periode

$K_0 := 100$ Anfangsbestand

$K_t := K_0 \cdot (1+i)^t$ Bestand nach t Perioden

$K_t =$

100
100
100
100
100
100
100
100
100
100
100
100
100
100
100



Für $i < 0$ nehmen die Bestände ab, jedoch niemals bis auf null:

Zum Wachstum von Seerosen

$n := 14$ Anzahl der Wachstumsperioden, z.B. Tage, Wochen, Monate, Jahre

$t := 0..n$ Betrachteter Zeitraum

$i := -0.1$ Wachstumsrate pro Periode

$K_0 := 100$ Anfangsbestand

$K_t := K_0 \cdot (1 + i)^t$ Bestand nach t Perioden

$K_t =$

100.00
90.00
81.00
72.90
65.61
59.05
53.14
47.83
43.05
38.74
34.87
31.38
28.24
25.42
22.88